КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Г. А. ЗИСМАН, О. М. ТОДЕС

I

Г. А. ЗИСМАН и О. М. ТОДЕС

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I

МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

530.1
З64
УДК 530 (075.8)

Зисман Гирш Абрамович и Тодес Оскар Мовшевич
КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ,
Том I
Механика, молекулярная физика, колебания и волны
М., 1974 г., 336 стр. с илл.
Редакторы: *А, Б. Соколов* и *Д. А. Миртова*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректоры *О. А. Сегал* и *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 3/I 1974 г. Подписано к печати 23/V 1974 г. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 3. Физ. печ. л. 21, Условн. печ. л. 21, Уч.-изд. л. 20,1. Тираж 123 000 экз. Цена книги 66 коп. Заказ № 1200.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1
«Печатный Двор» имени А. М. Горького
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

З $\frac{20401\text{-}076}{053(02)\text{-}74}$ 91-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ III

АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

ЧАСТЬ IV

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Предыдущие три издания были стереотипными с небольшими исправлениями и дополнениями. Изменение современной программы по физике в школе потребовало пересмотра материала, изложенного в нашем учебнике для втузов, сокращения некоторых вопросов, достаточно подробно изложенных в школьном курсе, и введения за счет этого новых проблемных разделов, возникших и развившихся в последние годы. При этом общая структура и расположение материала в курсе остались неизменными, как не изменились и принципы изложения отдельных разделов и всего учебника в целом.

Поскольку курс предназначен для слушателей высших учебных заведений не физического профиля и не для физических факультетов университетов, то большинство выводов и доказательств проводится не в самом общем виде. Как правило, эти выводы и доказательства даются на примерах с простейшей геометрией, для симметричных контуров и однородных полей, с последующим указанием на справедливость данного результата в общем случае для любой геометрии и неоднородных полей. Это тем более необходимо, что при параллельном прохождении высшей математики и физики в вузе необходимый для выполнения общих выводов математический аппарат, вроде преобразований поверхностных интегралов в объемные и т. п., дается на один-два семестра позже, а некоторые математические приемы и методы вообще не излагаются. В ряде случаев обобщения приведенных доказательств базируются на чисто физических соображениях, являющихся для усвоения более важными, чем громоздкие математические выводы. Так, после предварительного рассмотрения явления электромагнитной индукции как результата любого изменения сцепленного с контуром магнитного потока, вызванного движением поля, или его изменения за счет изменения тока, вывод количественной закономерности для э. д. с. индукции проводится лишь на одном примере контура с движущимся ребром.

Второй принцип построения нашего курса касается соотношения между классической и квантовой физикой. Поскольку некоторые основные факты, связанные с квантованием электронных уровней

в атомах, сообщаются учащимся еще в школьном курсе, то мы не считаем целесообразным делить втузовский курс как бы на два концентра — сначала классическая, а потом квантовая физика. До введения строгих количественных соотношений квантовой механики (в третьем томе) уже в первых разделах излагается влияние квантовой природы материи на изучаемые явления. Примерами могут служить разделы, посвященные теории теплоемкости в первом томе и структуры проводников, диэлектриков и полупроводников во втором томе.

Наконец, отбор новейших вопросов и проблем физики, включенных в наш курс, связан с оценкой их будущей технической значимости. Для большинства студентов, которым предстоит работать с нашим курсом, изучение физики не самоцель. Физика является основой современной техники и техники будущего. Усвоение курса служит базой как для изучения последующих и специальных дисциплин, так и для всей последующей деятельности после окончания втуза. Знание физики необходимо для выработки правильного, диалектико-материалистического представления о явлениях и закономерностях природы.

При всей ограниченности объема курса авторы старались систематически указывать возможные приложения в технике описываемых разделов физики.

Принятый в книге метод изложения материала, учитывающий прохождение математики во втузах параллельно с курсом физики, является результатом опыта чтения курса авторами в течение нескольких десятков лет.

Курс состоит из трех томов, отвечающих в основном трем семестрам, в течение которых изучается физика в подавляющем большинстве втузов.

Первый том содержит краткое изложение основ механики в объеме, который необходим для усвоения последующих разделов. Обусловлено это тем, что подробный курс теоретической механики читается независимо от общего курса физики и начинается не с динамики, а со статики. Далее следуют молекулярная физика, основы термодинамики, физика реальных газов, жидкостей и твердых тел. Последняя часть первого тома посвящена учению о колебаниях, волнах и звуке.

Второй том содержит учение об электричестве. В нем излагаются электростатика, законы постоянного тока, электромагнетизм и электромагнитные волны, основные сведения об электрических свойствах различного рода веществ, некоторые важные для приложений вопросы электроники.

Третий том посвящен вопросам оптики, физики атома, атомного ядра и микрочастиц. Эти разделы в настоящее время развиваются наиболее бурно, и здесь пришлось внести наибольшие изменения по сравнению с вышедшим 15 лет назад первым изданием курса.

В данном издании мы будем придерживаться нового ГОСТа на единицы и обозначения физических величин. Отметим некоторые наименее привычные его особенности. Сокращенные наименования единиц физических величин набираются не курсивом, как ранее, а прямым шрифтом. Если название единицы произошло от фамилии ученого, то ее сокращенное наименование пишется с большой буквы (Н — ньютон, Дж — джоуль и т. д., но м — метр и г — грамм), некоторые наименования изменяются (с — секунда, Кл — кулон). Десятичные приставки перед сокращенными наименованиями единиц имеют прежний вид, но набираются прямым шрифтом (кДж — килоджоуль, МГц — мегагерц, мкм — микрометр, нс — наносекунда). Для давления введена единица паскаль: 1 Па = 1 Н/м^2. При этом физическая атмосфера составляет 101325 Па, а техническая атмосфера — 98066,5 Па, т. е. обе приблизительно равны 10^5 Па = = 1 бар. За единицу измерения разности температур принят градус абсолютной шкалы Кельвина, называемый просто кельвином (К), без значка °, как было ранее. Так, например, теплоемкость измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К, или Дж·К$^{-1}$), а термический коэффициент — в обратных кельвинах (К$^{-1}$). Для связи с имеющейся в настоящее время справочной литературой в нескольких местах текста приведены сначала и старые обозначения.

Авторы будут признательны кафедрам физики и отдельным лицам, которые поделятся с ними своими соображениями, направленными на улучшение курса.

Г. А. Зисман
О. М. Тодес

ВВЕДЕНИЕ

Физика играет огромную роль в современном естествознании, в развитии современной техники и всех отраслей народного хозяйства. Это предопределяет значение курса физики в программах высшей школы, особенно высших технических учебных заведений.

Цели, которые ставятся при изучении физики во втузах, многообразны. Важнейшая из них состоит в ознакомлении с основными физическими явлениями, их механизмом, закономерностями и практическими приложениями. Этим закладывается физическая основа для изучения последующих общетехнических и специальных дисциплин.

Правильное представление о природе физических явлений особенно важно при постановке новых вопросов, которые всегда возникают в процессе практической деятельности инженера.

Изучение физики помогает выработке правильного, диалектико-материалистического мировоззрения.

Конкретные физические примеры как нельзя лучше убеждают, что знание марксистско-ленинской философии, повседневное применение ее законов являются одним из существенных залогов успешного развития науки и техники, прогресса человеческого общества.

Этими главнейшими задачами и определяются выбор основных изучаемых разделов физики и объем их изложения.

Последовательность в изложении различных разделов определяется как спецификой самого предмета, так и порядком прохождения во втузах смежных дисциплин: математики, теоретической механики, теплотехники, электротехники и т. д.

Предмет физики, как и всякой науки, раскрывается в ее детальном содержании. Дать точное определение предмета физики тем более трудно, что практически почти невозможно наметить границы раздела между физикой и другими естественными науками, например химией. Здесь можно дать лишь краткое, предварительное определение предмета физики.

«Физика» — по-гречески «природа». Наряду с другими естественными науками физика изучает свойства окружающего нас

мира, строение и свойства материи, законы взаимодействия и движения материальных тел.

Физика — наука о наиболее простых общих свойствах материи. Она является в значительной степени фундаментом всех естественных наук. Так, физика является основой для химии, объясняя природу периодичности свойств химических элементов и механизм возникновения междуатомных сил. В основе всей современной электротехники лежат физические закономерности взаимодействия электрических зарядов и электромагнитных полей.

Процесс познания в физике, как и в любой науке, начинается либо с наблюдения явлений в естественных условиях, либо со специально поставленных опытов — экспериментов.

На основе накопленного экспериментального материала строится предварительное научное предположение о механизме и взаимосвязи явлений — создается гипотеза. Это еще не научная теория. Гипотеза требует проверки и доказательства.

Некоторые гипотезы, ряд следствий из которых противоречит опыту, оказываются ошибочными и отбрасываются при дальнейшем развитии науки (например, гипотезы флогистона, эфира и др.).

Другие гипотезы, выдерживающие проверку на опыте и правильно предсказывающие ряд новых, ранее неизвестных явлений, входят в науку в качестве физических теорий. Правильная физическая теория дает качественное и количественное объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения — вскрывает механизм этих явлений и формулирует их закономерности.

Вся история науки показывает, что процесс познания материального мира не заканчивается каждым таким кругом — от опыта к теории и от теории обратно к опыту. Очень скоро обнаруживаются новые области явлений и накапливаются факты, объяснение которых не укладывается в рамки существующих теорий и требует выдвижения новых гипотез. Примером может служить непрерывное развитие наших знаний и представлений о строении вещества.

Созданная во второй половине XIX века молекулярно-кинетическая теория исходила из положения, что все тела построены из мельчайших частичек, находящихся в непрерывном движении. Эти частички были названы атомами, что по-гречески значит «неделимые».

Однако уже в конце XIX века были обнаружены испускаемые атомами еще более мелкие (по массе) частички — отрицательно заряженные электроны. Возник вопрос о строении атома, и в начале XX века было доказано, что атом имеет ажурное строение, в центре его расположено положительно заряженное ядро, в котором сосредоточена почти вся масса атома.

Трудная ломка сложившихся метафизических представлений о простейших частицах материи как о вечных и неизменных в своих свойствах кирпичиках мироздания привела к созданию многочисленных новых правильных и неправильных гипотез, а также к попыткам идеалистической фальсификации физических выводов.

Анализируя возникший в начале XX века «кризис» в физике, В. И. Ленин указывал, что нет и не может быть неизменных элементов вещества и «электрон так же неисчерпаем, как атом» («Материализм и эмпириокритицизм»). Все дальнейшее развитие современной физики подтверждает правильность этих предсказаний теории познания диалектического материализма. Был открыт ряд новых свойств электрона (спин, волновая природа) и установлены превращения электронов (при определенных условиях) в другие материальные частицы и обратные превращения.

С другой стороны, в 1919 г. удалось впервые расщепить атомное ядро и показать сложность его строения. Были открыты многочисленные новые так называемые элементарные частицы (протон, нейтрон, гипероны, мезоны, нейтрино), и было показано, что они способны превращаться друг в друга. Используя современные сверхмощные ускорители ядерных частиц, в 1956 г. удалось получить новые, ранее не наблюдавшиеся и лишь теоретически предсказанные физиками частицы — антипротон, антинейтрон и др. В настоящее время число вновь открытых микрочастиц, рождающихся при релятивистских столкновениях и, по большей части, коротко живущих, превышает несколько сотен.

С каждым таким открытием непрерывно расширялись и углублялись представления о строении вещества и взаимодействии элементарных частиц, и возникала необходимость в создании новых гипотез и развитии новых теорий. На примере открытия антипротона и антинейтрона видно, как хорошо обоснованная и развитая физическая теория, хотя и базирующаяся на ограниченном материале и, следовательно, сама неизбежно ограниченная, позволяет шире поставить опыт и обнаружить новые факты и новые явления.

Эти новые открытия в свою очередь вызывают потребность в исправлении или дополнении существующих теорий или создании новых, более глубоко и более точно отражающих объективные закономерности природы. Новая теория не всегда отрицает старую, но чаще всего включает ее в себя как часть, т. е. является более широкой и всеохватывающей.

Таким путем — по непрерывно восходящей спирали — идет развитие науки. Человек все более и более глубоко проникает в сущность окружающего его материального мира.

Развитие физики тесно связано с процессом развития человеческого общества, с потребностями практики, развитием производи-

тельных сил. *Физика тесно связана с техникой.* Крупные физические открытия рано или поздно приводят к техническим переворотам, созданию новых отраслей техники и развитию соответствующих технических наук, тесно связанных с физикой и основывающихся на ее законах. Трудно найти такую область техники, которая не выросла из физики. Современная теория электромагнетизма, созданная трудами Фарадея, Ампера, Эрстеда, Ленца, Максвелла, Герца, Лоренца, Попова и других крупнейших физиков, явилась основой развития всей промышленной электротехники и радиотехники. Если вчера полупроводники служили только объектами лабораторных исследований, то сегодня с их помощью удается создать сверхминиатюрные радиоприборы, удобные нагреватели и холодильники, надежные и быстродействующие счетные машины и многое другое. На наших глазах на просторы практического применения выходит ядерная энергетика, родившаяся из самого, казалось бы, далекого от жизни раздела физики — физики атомного ядра.

В свою очередь развитие техники дает физикам в руки новые, более совершенные, более точные приборы и более мощные методы исследования, позволяющие проникнуть в глубь вещества. Только наличие мощной производственной базы, высокоразвитой металлообрабатывающей, электротехнической и радиотехнической промышленности позволило создать в Советском Союзе уникальные и сверхмощные ускорители, помогающие физикам глубже проникнуть в природу взаимодействия и структуру мельчайших частиц вещества. Наряду с серпуховским гигантом, ускоряющим протоны до энергий более 70 миллиардов электрон-вольт, входят в строй еще более мощные и использующие более эффективные принципы, вроде новосибирского ускорителя на встречных пучках.

Взаимодействие физики и техники этим не ограничивается. Развитие техники и промышленности ежедневно, ежечасно требует разрешения ряда физических проблем, тесно связанных с дальнейшим техническим прогрессом. Результаты физических исследований и тончайшие современные физические методы широко внедряются в технику, промышленность и сельское хозяйство. При изучении механических свойств материалов в последнее время все шире применяются оптические, акустические и электрические методы измерения напряжений. Еще недавно радиоактивные и устойчивые изотопы элементов были редким достоянием немногих научных лабораторий, а в наши дни «меченые атомы» широко внедряются в металлургию и во многие другие отрасли народного хозяйства, в медицину и биологию.

Содружество физики с техникой становится все более тесным. Жизнь показывает, что большие принципиальные современные физические и технические проблемы должны решаться большими

коллективами людей, объединяющими физиков, химиков и представителей различных отраслей техники. Только такое тесное содружество позволило советским ученым и инженерам в кратчайший срок добиться громадных успехов в области ядерной техники и построить первую в мире электростанцию, использующую внутриядерную энергию. Такое же тесное содружество ученых и техников помогает в развитии второй крупнейшей современной научно-технической проблемы — физики и техники полупроводников.

То обстоятельство, что изучение физики начинается с изучения механического движения тел, не случайно и обусловлено не только исторической последовательностью развития физики.

Движение представляет собой форму существования материи. Движение в философском смысле — это всякое изменение материи, всякий происходящий в природе процесс: физический, химический, биологический, общественный.

«Движение, рассматриваемое в самом общем смысле слова, т. е. понимаемое как форма бытия материи, как внутренне присущий материи атрибут, обнимает собою все происходящие во вселенной изменения и процессы, начиная от простого перемещения и кончая мышлением» (Энгельс).

Механика изучает простейшую форму движения — перемещение материальных тел, т. е. изменение их взаимного положения с течением времени.

«В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени» (Ленин).

Простое механическое перемещение всегда сопровождает все более сложные и высшие формы движения.

Однако, имея в своей основе механическое движение, более высокие формы движения никогда не сводятся к нему, не исчерпываются им.

Потребности человеческой практики и производства, создание простейших приспособлений и машин также привели к тому, что из всех разделов физики высокого уровня развития в первую очередь, в XVII—XVIII веках, достигла механика. Теоретическая и прикладная механика, механика упругих и текучих тел давно уже выделились из физики в самостоятельные отрасли науки. В соответствии с этим в курсе общей физики рассматриваются лишь самые общие принципы и положения механики в том объеме, в котором они нужны для прохождения последующих разделов физики — для уяснения таких наиболее важных и общих принципов физики, как, например, закон сохранения и превращения энергии.

Современное развитие физики коснулось и механики. На смену старым метафизическим представлениям, согласно которым время

и пространство независимы друг от друга, а также от материи, в XX веке пришли новые, обоснованные опытом представления о взаимосвязанности пространства и времени и о том, что их свойства определяются свойствами движущейся в пространстве и времени материи. Эти новые представления лежат в основе созданной Эйнштейном «теории относительности». Ряд основных положений этой теории необходимо излагать в различных разделах современного курса физики, начиная с его первого раздела — физических основ механики. Столь же необходимо основывать изложение последующих разделов курса на новых идеях и представлениях физики XX века, которые являются основой понимания физических явлений и базой их практического использования.

ЧАСТЬ I
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

ГЛАВА I
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1. Материальная точка. Системы отсчета

Отдел механики, изучающий движение материальных тел в пространстве и времени без рассмотрения вызывающих это движение взаимодействий, носит название кинематики.

Движущееся тело обладает определенными размерами — протяженностью в пространстве. Само движение также происходит в какой-то части пространства, размер которой мы назовем масштабом движения. Так, например, наша Земля представляет собой шар, диаметр которого $d \approx 13\,000$ км. Обращаясь вокруг Солнца, Земля движется по почти круговой орбите, диаметр которой (масштаб движения) $D \approx 300\,000\,000$ км. При таком огромном масштабе движения, когда $d \ll D$, протяженность самого земного шара и происходящие в нем процессы практически не сказываются на характере его движения по орбите, и Землю можно в этом движении рассматривать как материальную точку. Вообще, *материальной точкой мы будем называть тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с масштабами движения.*

Понятие материальной точки есть научная абстракция. Вводя это понятие, мы абстрагируемся (отвлекаемся) от всех несущественных для данного движения свойств тела, как, например, его размеров, строения, изменений внутреннего состояния, не говоря уже о менее существенных его характеристиках. Следует указать, что вообще, вводя абстрактные понятия, в науке отвлекаются от всех свойств тел, несущественных для рассматриваемого явления, упрощая, таким образом, задачу и концентрируя внимание на тех свойствах тел, которые предопределяют характер изучаемого явления.

Введенное понятие материальной точки оказывается полезным и при рассмотрении протяженных тел. Например, при суточном вращении Земли вокруг своей оси масштаб движения оказывается сравнимым с размером тела, и Землю в этом движении уже нельзя

рассматривать как материальную точку. Однако в этом случае мы можем мысленно расчленить Землю на отдельные части, размеры которых малы по сравнению с масштабами их движения, т. е. на отдельные материальные точки. Зная движение всех этих материальных точек, мы тем самым будем знать и движение всей их совокупности, т. е. земного шара, рассматриваемого в качестве системы материальных точек.

Изучая более подробно внутренние свойства конкретных тел, мы можем прийти к понятию *твердого тела как системы жестко связанных между собой материальных точек; упругого тела как системы точек, способных к небольшим относительным смещениям; газа как системы несвязанных, свободно движущихся материальных точек.* Все эти понятия также являются приближениями к действительности, абстракциями. С помощью таких абстракций можно изучить, например, давление газа на стенки сосуда, в котором он заключен, но нельзя объяснить, почему раскаленный газ светится. Для ответа на последний вопрос придется отказаться от представления о том, что атом газа есть материальная точка, и выйти за пределы области явлений, изучаемых в механике.

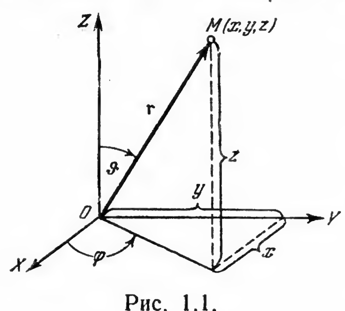


Рис. 1.1.

Таким образом, *движение в механике рассматривается как перемещение отдельных материальных точек или систем материальных точек в пространстве с течением времени.*

Нашей первой задачей является изучение кинематических характеристик движения одной материальной точки. Как можно количественно охарактеризовать положение точки в пространстве?

Определять положение точки «по отношению к пустому пространству» невозможно и *физически бессмысленно*. Можно определять положение любого тела, в том числе и материальной точки, лишь по отношению к другому, произвольно выбранному материальному телу, называемому телом отсчета. Выбранное таким образом тело условно считается неподвижным. Связывая с этим телом произвольную систему координат, мы получим систему отсчета положений материальной точки.

На рис. 1.1 изображена простейшая прямоугольная система координат $OXYZ$. Положение точки M в этой системе характеризуется тремя координатами, которые обозначены через x — абсцисса, y — ордината и z — аппликата точки $M(x, y, z)$. Эти три отрезка являются проекциями радиуса-вектора $\overline{OM} = \mathbf{r}$, проведенного из начала координат в точку $M(\mathbf{r})$. Вместо координат x, y, z радиус-вектор $\mathbf{r}$ можно характеризовать в пространстве и иначе,

например задавая его длину r и два угла: ϑ между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и осью OZ и φ между проекцией $\mathbf{r}$ на плоскость XY и осью OX, как это показано на чертеже. Во всех случаях при различном выборе систем отсчета радиус-вектор $\mathbf{r}$ и положение точки в пространстве характеризуются количественно тремя числами, которые могут меняться независимо друг от друга.

Это является математическим отражением того факта, что пространство т р е х м е р н о. Поскольку три величины, характеризующие положение точки в пространстве, взаимно независимы, говорят, что *материальная точка обладает тремя степенями свободы.*

Если материальная точка движется, то ее положение в пространстве с течением времени меняется, т. е. радиус-вектор $\mathbf{r}$, или, что то же, три величины x, y и z, являются функциями времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \tag{1.1}$$

либо

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

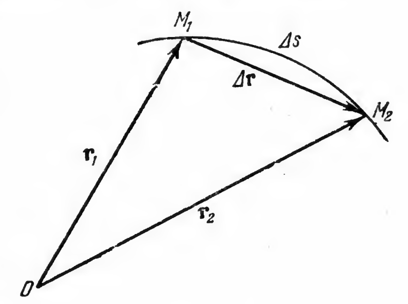


Рис. 1.2.

Совокупность последовательных положений, занимаемых точкой M в процессе ее движения, образует в пространстве линию, называемую т р а е к т о р и е й движущейся точки. На рис. 1.2 изображен отрезок траектории. В какой-то момент времени t_1 точка M занимает на траектории положение M_1, характеризуемое радиусом-вектором $\overline{OM_1} = \mathbf{r}_1$. В следующий момент t_2, спустя промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, точка M занимает на траектории новое положение, M_2, характеризуемое радиусом-вектором $\overline{OM_2} = \mathbf{r}_2$. Дуга $\smile{M_1M_2} = \Delta s$ при этом представляет собой путь, пройденный точкой M за время Δt.

Вектор $\overline{M_1M_2} = \Delta\mathbf{r}$, проведенный из начального положения M_1 в конечное положение M_2, называется вектором перемещения точки M за время Δt. При прямолинейном движении абсолютная величина вектора перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ равна пути Δs. В общем случае, как это видно из рисунка, $|\Delta\mathbf{r}|$ и Δs не совпадают, но различие между ними тем меньше, чем меньше $\Delta\mathbf{r}$. Очевидно, что при произвольном криволинейном движении равенство $|\Delta\mathbf{r}| = \Delta s$ соблюдается лишь в пределе для бесконечно малого промежутка времени, т. е. когда $\Delta\mathbf{r} \to 0$:

$$\lim_{\Delta\mathbf{r} \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta\mathbf{r}|} = 1. \tag{1.3}$$

Из рис. 1.2 видно, что

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r},$$

или

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tag{1.4}$$

т. е. вектор перемещения равен геометрической разности радиусов-векторов конечного и начального положения точки; этот вектор представляет собой приращение радиуса-вектора и характеризует изменение положения точки M в пространстве за время Δt.

§ 2. Скорость и ускорение произвольно движущейся точки

Траектория и перемещение являются лишь чисто геометрическими характеристиками движения. Два различных движения, для которых одно и то же перемещение $\Delta\mathbf{r}$ совершилось за разные промежутки времени, геометрически одинаковы, но кинематически совершенно различны. Это различие характеризуется различной быстротой изменения положения точки, определяемой отношением

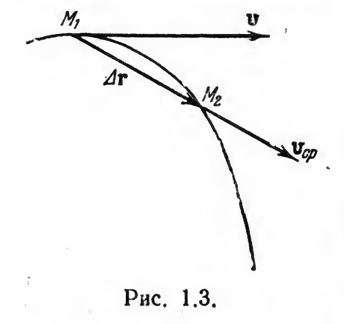


Рис. 1.3.

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}_{\text{ср}}. \tag{2.1}$$

Вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ называется **средней скоростью** движения точки за время Δt. Его численное значение $|\mathbf{v}_{\text{ср}}| = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$ есть скорость такого равномерного и прямолинейного движения, при котором точка M перешла бы из положения M_1 в положение M_2 за тот же промежуток времени Δt, за который произошло ее истинное криволинейное движение по дуге $\overset{\frown}{M_1M_2}$ (рис. 1.3). Вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$, как и вектор $\Delta\mathbf{r}$, направлен по секущей M_1M_2.

Переходя к пределу для бесконечно малого промежутка времени ($\Delta t \to 0$), мы получим вектор **истинной**, или **мгновенной скорости** в точке M_1:

$$\mathbf{v} = \lim_{M_2 \to M_1} \mathbf{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{2.2}$$

Поскольку секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости $\mathbf{v}$ направлен по касательной к траектории. Тогда согласно (1.3)

$$|\mathbf{v}| = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \tag{2.3}$$

т. е. величина скорости v численно равна пределу отношения длины пути к промежутку времени, как в случае прямолинейного движения. В абсолютной системе единиц СГС скорость измеряется в см/с. В технической и международной системе единиц СИ скорость v измеряется в м/с.

При прямолинейном движении быстрота изменения величины скорости v характеризуется у с к о р е н и е м w, т. е. изменением величины скорости за единицу времени.

В общем случае произвольного криволинейного движения вектор скорости $\mathbf{v}$ может меняться и по величине и по направлению. Быстрота изменения вектора скорости тогда будет характеризоваться некоторым вектором ускорения $\mathbf{w}$. Для дальнейшего будет целесообразно расчленить вектор $\mathbf{w}$ на две составляющие, характеризующие в отдельности быстроту изменения скорости по величине и быстроту изменения ее по направлению.

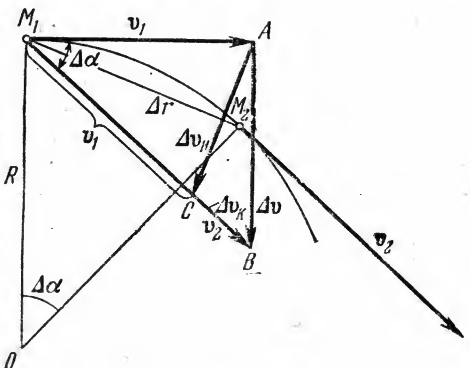


Рис. 1.4.

На рис. 1.4 изображен отрезок траектории между двумя соседними бесконечно близкими точками M_1 и M_2. Скорости в этих точках $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ направлены по касательным к траектории и отличаются друг от друга по величине и по направлению. Перенесем вектор $\mathbf{v}_2$ параллельно самому себе в точку M_1, как это показано на рис. 1.4. Соединим теперь конец вектора $\mathbf{v}_1$ с концом перенесенного вектора $\mathbf{v}_2$ вектором $\Delta\mathbf{v}$. Из чертежа видно, что

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad (2.4)$$

т. е. вектор $\Delta\mathbf{v}$ есть геометрическое приращение вектора $\mathbf{v}$ за время Δt. Отношение

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{w}_{\text{ср}} \quad (2.5)$$

является вектором с р е д н е г о у с к о р е н и я за время Δt, а предел этого отношения будет вектором и с т и н н о г о, или м г н о в е н н о г о у с к о р е н и я

$$\mathbf{w} = \lim_{M_2 \to M_1} \mathbf{w}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.6)$$

при произвольном движении точки M.

На отрезке M_1B, изображающем перенесенный в точку M_1 вектор $\mathbf{v}_2$, отложим отрезок M_1C, численно равный длине вектора $\mathbf{v}_1$, и соединим прямой точку A (конец вектора $\mathbf{v}_1$) с точкой C. Из рис. 1.4 видно, что вектор $\Delta\mathbf{v}$ может быть представлен как геометрическая сумма двух векторов:

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_к + \Delta\mathbf{v}_н. \qquad (2.7)$$

Вектор $\Delta\mathbf{v}_к$ *численно характеризует изменение величины скорости за время* Δt:

$$|\Delta\mathbf{v}_к| = v_2 - v_1 = \Delta v. \qquad (2.8)$$

Если величина скорости v во время движения не меняется, то $\Delta v = 0$ и $\Delta\mathbf{v}_к = 0$.

Вектор $\Delta\mathbf{v}_н$ *характеризует изменение направления вектора скорости за время* Δt. Из чертежа видно, что он направлен в сторону вогнутости кривой. Если с течением времени направление движения не меняется, то векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ направлены вдоль одной и той же прямой и $\Delta\mathbf{v}_н = 0$. Подставляя (2.7) в (2.6), получаем:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_к}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_н}{\Delta t} = \mathbf{w}_к + \mathbf{w}_н. \qquad (2.9)$$

При $\Delta t \to 0$ угол $\Delta\alpha$ при вершине равнобедренного треугольника M_1AC стремится к нулю и направления векторов $\mathbf{v}_2$ и $\Delta\mathbf{v}_к$ стремятся к направлению вектора $\mathbf{v}_1$. Поэтому вектор

$$\mathbf{w}_к = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_к}{\Delta t} \qquad (2.10)$$

также направлен вдоль вектора $\mathbf{v}_1$, т. е. по касательной к траектории. Численное значение этого вектора согласно (2.8) равно

$$w_к = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \qquad (2.11)$$

т. е. характеризует быстроту изменения величины скорости при движении. Этот вектор называется к а с а т е л ь н ы м, или т а н г е н ц и а л ь н ы м у с к о р е н и е м.

Для определения величины и направления второго вектора $\mathbf{w}_н$ будем считать промежуток времени Δt бесконечно малым. Тогда точки дуги траектории M_1M_2 и векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ будут лежать практически в одной плоскости (называемой соприкасающейся плоскостью к кривой). Для упрощения дальнейшего вывода ограничимся здесь случаем п л о с к о г о движения, при котором все точки траектории лежат в одной плоскости. Восставим в точках M_1 и M_2 перпендикуляры к касательным — нормали к кривой — до их пересечения в точке O. Малая дуга $\Delta s = \smile{M_1M_2}$ будет тогда практически отрезком окружности с центром в точке O и радиусом

$$R \approx OM_1 \approx OM_2. \qquad (2.12)$$

Угол между линиями OM_1 и OM_2 также равен $\Delta\alpha$ (углы со взаимно-перпендикулярными сторонами). Величина R связана с $\Delta\alpha$ очевидным соотношением

$$R \approx \frac{\Delta s}{\Delta\alpha}. \qquad (2.13)$$

В случае произвольной пространственной кривой величина R и положение точки O определяются из предельного соотношения

$$R = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha}; \qquad (2.14)$$

R носит название радиуса кривизны траектории. Величина, обратная радиусу кривизны,

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \qquad (2.15)$$

называется соответственно кривизной траектории в данной точке. Для окружности R и K постоянны во всех точках. В случае прямой линии угол $\Delta\alpha$ между направлениями траектории в соседних точках тождественно равен нулю и, следовательно, кривизна K также равна нулю.

Проводя на рис. 1.4 отрезок перемещения $\Delta\mathbf{r}$, соединяющий точки M_1 и M_2, мы получим два равнобедренных треугольника OM_1M_2 и M_1AC, подобных друг другу. Из пропорциональности сходственных сторон можно получить, что

$$|\Delta\mathbf{v}_н| = \frac{v_1}{R} |\Delta\mathbf{r}|. \qquad (2.16)$$

Отсюда можно вычислить величину искомого вектора

$$w_н = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{v}_н|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R} \cdot \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v^2}{R}, \qquad (2.17)$$

где в окончательном выражении мы опустим индекс 1 ввиду произвольности выбора начальной точки.

В пределе угол $\Delta\alpha$ при вершине равнобедренного треугольника M_1AC стремится к нулю, а углы при основаниях стремятся к 90°.

Следовательно, $\Delta\mathbf{v}_н$ в пределе перпендикулярен к $\mathbf{v}_1$ и вектор $\mathbf{w}_н$ перпендикулярен к вектору скорости и направлен по нормали к центру кривизны O кривой. Поэтому вектор $\mathbf{w}_н$ носит название нормального ускорения. Согласно (2.17) величина нормального ускорения численно равна отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории в данной точке. Можно доказать, что эти соотношения для $\mathbf{w}_н$ остаются справедливыми и в общем случае произвольной пространственной кривой.

Касательное и нормальное ускорения (рис. 1.5) взаимно-перпендикулярны, и их геометрическая сумма равна

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_к + \mathbf{w}_н, \tag{2.18}$$

т. е. вектор полного ускорения равен по модулю

$$w = \sqrt{w_к^2 + w_н^2}. \tag{2.19}$$

В системе СГС ускорение измеряется в *см/с*², а в системе СИ — в м/с².

В случае равномерного криволинейного движения величина скорости постоянна: $v = \text{const}$, касательное ускорение равно нулю и полное ускорение равно нормальному:

$$\mathbf{w}_к = 0 \ \text{ и } \ \mathbf{w} = \mathbf{w}_н. \tag{2.20}$$

Для изображенного на рис. 1.6 примера равномерного вращения материальной точки по окружности постоянного радиуса R величина нормального ускорения $w_н = v^2/R$ остается постоянной, а вектор $\mathbf{w}_н$ направлен все время

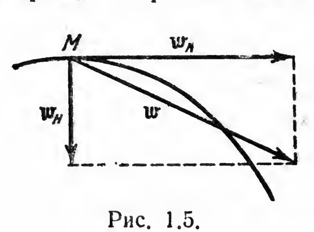


Рис. 1.5.



Рис. 1.6.

к центру окружности. Поэтому $\mathbf{w}_н$ называют также ц е н т р о с т р е м и т е л ь н ы м у с к о р е н и е м.

В случае неравномерного, но прямолинейного движения кривизна траектории $K = 1/R$ равна нулю, $R = \infty$, нормальное ускорение $\left(w_н = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\infty} = 0\right)$ отсутствует и полное ускорение равно касательному:

$$\mathbf{w}_н = 0 \ \text{ и } \ \mathbf{w} = \mathbf{w}_к. \tag{2.21}$$

Направление этого вектора остается постоянным — все время вдоль прямой, по которой движется точка (рис. 1.7). Если при этом остается постоянной и величина w, то движение называется р а в н о у с к о р е н н ы м. Из школьного курса физики известно, что в этом случае зависимость пути от времени выражается формулой

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2}, \tag{2.22}$$

а скорость растет линейно со временем:

$$v = v_0 + wt. \tag{2.23}$$

В случае равномерного и прямолинейного движения скорость неизменна и по величине и по направлению: $\mathbf{v} = \text{const}$, а обе составляющие ускорения и само ускорение отсутствуют:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_н = \mathbf{w}_к = 0. \qquad (2.24)$$

В общем случае неравномерного криволинейного движения вектор ускорения $\mathbf{w}$ и обе его составляющие $\mathbf{w}_к$ и $\mathbf{w}_н$ отличны от нуля.

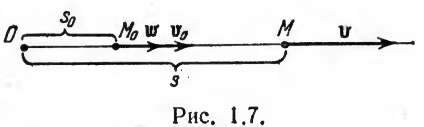


Рис. 1.7.

В заключение рассмотрим движение тела, брошенного под углом α к горизонту с некоторой начальной скоростью v_0 (рис. 1.8). Ускорение земного притяжения постоянно по величине и по направлению (оно направлено вертикально вниз). Поэтому полное ускорение тела во время движения остается постоянным:

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} = \text{const}. \qquad (2.25)$$

Однако, как видно из чертежа, расчленение $\mathbf{w}$ на нормальное и касательное ускорение в каждой точке траектории различно. Так,

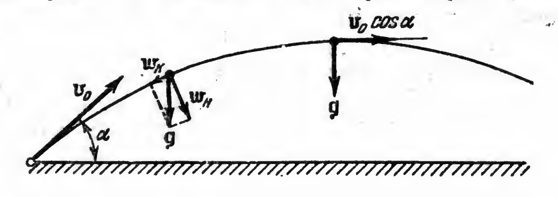


Рис. 1.8.

например, в верхней точке траектория горизонтальна и перпендикулярна к вектору $\mathbf{w}$. Следовательно, в этой точке существует только нормальное ускорение $w_н = g$ и

$$g = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{R}. \qquad (2.26)$$

Из этого соотношения можно определить радиус кривизны в вершине траектории.

ГЛАВА II
ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

§ 3. Законы Ньютона

Раздел механики, изучающий движение материальных тел совместно с физическими причинами, вызывающими это движение, называется динамикой. Основные представления и количественные закономерности динамики возникли и развиваются на базе многовекового человеческого опыта: наблюдений за движением земных и небесных тел, производственной практики общества и специально поставленных экспериментов. Великий итальянский физик Галилео Галилей экспериментально установил так называемый закон инерции. Он показал, что при отсутствии сопротивления тело под действием постоянной силы будет двигаться равноускоренно, и установил, что ускорение w тяжелого тела, движущегося по гладкой наклонной плоскости, обратно пропорционально длине этой плоскости l при постоянной ее высоте h (рис. 1.9). Отсюда вытекает, что в пределе движение тела по гладкой горизонтальной плоскости без сопротивления будет происходить без всякого ускорения, т. е. равномерно и прямолинейно. При этом

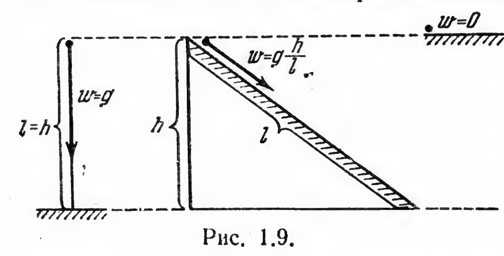


Рис. 1.9.

$$\boxed{\mathbf{w} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \text{const.}} \tag{3.1}$$

Это положение Галилея было подтверждено всеми последующими опытами и составляет содержание так называемого первого основного закона динамики:

Материальная точка (тело), достаточно удаленная от всех других тел (т. е. не взаимодействующая с ними), будет сохранять

свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. При этом покой следует рассматривать лишь как частный случай равномерного и прямолинейного движения, когда $\mathbf{v} = \text{const} = 0$.

Этот закон одинаково справедлив как для движения гигантских небесных тел, так и для движения мельчайших пылинок. Свойство материальных тел сохранять состояние равномерного и прямолинейного движения называется инерцией.

Равномерное и прямолинейное движение тела при отсутствии внешних воздействий называется движением по инерции.

Следует отметить, что представление о движении по инерции является научной абстракцией. Наблюдать движение по инерции в чистом виде невозможно, так как никакое тело не может быть изолировано от воздействия других тел, как бы далеко от него эти тела ни находились. Введение этой абстракции позволяет связать ускорение материальных тел с действиями, оказываемыми на них другими телами.

Изменения состояния движения материальных тел, т. е. ускорения, вызываются силами. Остановимся на анализе этого важнейшего понятия.

Выше мы уже отмечали, что инерциальное движение, т. е. движение без ускорения, возможно при отсутствии какого бы то ни было взаимодействия между движущимся телом и другими телами. *Всякое изменение состояния движения, любое ускорение есть результат действия на движущееся тело со стороны других тел.*

Если под действием тела A материальная точка испытывает ускорение, то мы говорим, что на эту точку действует со стороны тела A сила $\mathbf{F}$.

В общем случае силу $\mathbf{F}$ мы определяем как физическую величину, характеризующую действие, оказываемое одним телом на другое. Эта векторная величина определяется численной величиной или модулем $|\mathbf{F}| = F$, направлением в пространстве и точкой приложения.

Если на материальную точку действуют две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, то их действие эквивалентно действию одной силы

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

получаемой из известного треугольника сил.

Если к материальной точке приложены три силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$, то они складываются по тому же правилу:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}',$$
$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}'',$$

как это показано на рис. 1.10, *а*. Равнодействующая этих трех сил $\mathbf{F}''$ может быть проще построена в форме замыкающей многоугольника сил, как это показано на рис. 1.10, *б*. Когда на

точку действует n сил, равнодействующая **F**, являющаяся геометрической суммой данных сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_i, \tag{3.2}$$

строится по тому же правилу многоугольника.

Динамическое проявление силы состоит в том, что под действием силы материальное тело испытывает ускорение. Статическое действие силы приводит к тому, что упругие тела (пружины) под действием сил деформируются, газы — сжимаются и т. д.

Количественное измерение силы и установление единицы силы может быть дано лишь в связи с другими, связанными с силой величинами; к этому вопросу мы вернемся ниже.

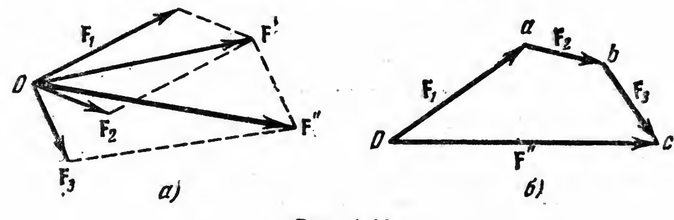


Рис. 1.10.

Опыт показывает, что под действием одной и той же силы различные тела испытывают неодинаковые ускорения, т. е. изменение их инерциального движения различно. Мы говорим, что различна инерция этих тел.

Физической величиной, характеризующей инертность материального тела, является его м а с с а.

Ньютон определил *массу как количество вещества, содержащегося в теле.* Это определение массы нельзя считать строгим и исчерпывающим. Как и другие физические понятия, понятие массы раскрывается лишь при изучении всех ее свойств и проявлений, которые будут рассмотрены далее. Определением Ньютона можно пользоваться, понимая его в том смысле, что масса двух одинаковых и одинаково движущихся тел вдвое больше массы одного из них. В действительности же масса одного и того же тела может, как мы увидим дальше, меняться при движении.

Отметим сразу же, что масса характеризует не только инерцию материального тела, но и его г р а в и т а ц и о н н ы е свойства: *сила притяжения, испытываемая данным телом со стороны другого тела, пропорциональна их массам.* Далее мы увидим, что масса также определяет полный запас энергии материального тела (§ 9).

Величину массы определяют по различным ее проявлениям (инерции, тяготению) путем сравнения с массой какого-нибудь

эталонного тела, произвольно принятой за единицу. За единицу массы в системе СГС принимают 1/1000 массы международного платиноиридиевого эталона, хранящегося в Париже. Эта единица с точностью до ~0,003% равна массе 1 см^3 дистиллированной воды при 4 °С и в $6{,}02\cdot10^{23}$ раз больше массы неподвижного протона (ядра атома водорода). Единицей массы в системе единиц СИ служит масса самого эталона 1 кг = 1000 г.

Введение понятия массы позволяет нам теперь уточнить данное нами в § 1 определение материальной точки. *Материальной точкой называется тело, при изучении движения которого можно отвлечься от всех его свойств, кроме массы.* Каждая материальная точка, следовательно, характеризуется величиной своей массы m.

Обобщая результаты опытов Галилея по падению тяжелых тел, астрономические законы Кеплера о движении планет, данные собственных исследований и т. п., Ньютон сформулировал второй основной закон динамики, количественно связывающий изменение движения материального тела с силами, вызывающими это изменение движения.

При действии сил движение тела перестает быть равномерным и прямолинейным и появляется ускорение $\mathbf{w}$. Направление его совпадает с направлением действия силы.

Сопоставляя действие различных сил на одно и то же тело данной массы m, мы убеждаемся в том, что величина возникающего ускорения прямо пропорциональна величине действующей силы. Следовательно,

$$\mathbf{w}\sim\mathbf{F} \text{ при } m=\text{const}. \qquad (3.3)$$

При действии одной и той же силы на различные тела ускорения этих тел оказываются различными. Чем больше масса тела m, тем больше его инертность и тем меньшее ускорение w под действием данной силы F оно получает. Опыт показывает, что

$$w\sim\frac{1}{m} \text{ при } F=\text{const}, \qquad (3.4)$$

т. е. ускорение, получаемое телом под действием данной силы, обратно пропорционально величине его массы. Соотношение (3.4) показывает, что масса тела m является количественной мерой его инертности. Объединяя (3.3) и (3.4), получаем, что

$$\mathbf{w}\sim\frac{\mathbf{F}}{m}, \text{ или } \mathbf{F}\sim m\mathbf{w}. \qquad (3.5)$$

Вводя соответствующий коэффициент пропорциональности k, мы можем записать соотношение (3.5) в виде

$$\mathbf{F}=km\mathbf{w}. \qquad (3.6)$$

Величина k зависит от выбора системы единиц измерения массы, ускорения и силы. В физике принято выбирать единицу силы так, чтобы $k = 1$; тогда уравнение (3.6) принимает вид

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{w}.} \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) представляет математическую запись второго основного закона динамики в классической механике:

Вектор силы, действующей на материальную точку, численно равен произведению массы точки на вектор ускорения, возникающего при действии этой силы.

При указанном выборе коэффициента пропорциональности $k = 1$ единицы измерения силы, массы и ускорения не являются независимыми. Единицы измерения ускорения также принято выбирать не произвольно, а выражать их через единицы длины (пути) и времени — физические величины, которыми в соответствии с формулами (2.6) и (2.2) определяется ускорение. Таким образом, в формулу (3.7) входят четыре физические величины — сила, масса, путь и время, — измеряемые своими единицами, и эти единицы оказываются связанными друг с другом одним уравнением. Единицы измерения любых трех из них могут быть определены произвольно, а оставшаяся четвертая единица определяется через уже введенные.

Чаще всего в качестве основных единиц вводят единицы длины, времени и массы. Так, если массу выражать в г, а ускорение в см/с², то силу надо измерять в динах. Дина (дин) есть единица силы в системе СГС и представляет собой такую силу, которая массе в 1 г сообщает ускорение 1 см/с². В системе единиц СИ масса измеряется в кг, ускорение — в м/с², а сила — в ньютонах. Ньютон (Н) есть такая сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с². Легко видеть, что

$$1\ \text{Н} = 1\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{1000\ \text{г}\cdot 100\ \text{см}}{\text{с}^2} = 10^5\,\frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}^2} = 10^5\ \text{дин}.$$

В технической системе единиц в качестве основных выбирают единицы длины, времени и силы. *Единица массы будет при этом уже не основной, а производной единицей.* В этой системе единицей силы является сила веса 1 кгс (килограмм-сила), т. е. такая сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 9,81 м/с². Следовательно,

$$1\ \text{кгс} = 9{,}81\ \text{Н} = 9{,}81\cdot 10^5\ \text{дин}$$

и

$$1\ \text{Н} = 0{,}102\ \text{кгс}.$$

Следует отметить, что первый и второй основные законы динамики не являются независимыми: первый есть частный случай вто-

рого. Действительно, если на материальную точку не действует сила, т. е. $\mathbf{F} = 0$, то из второго закона (3.7) следует, что

$$m\mathbf{w} = 0,$$

или, в силу того, что m отлично от нуля,

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Но равенство нулю ускорения означает, что приращение скорости $\Delta\mathbf{v}$ равно нулю, т. е. что скорость остается постоянной.

До сих пор мы рассматривали лишь одну сторону взаимодействия между телами: влияние других тел на характер движения данного выделенного тела (материальной точки). Такое влияние не может быть односторонним, взаимодействие должно быть, по сути дела, обоюдным. Этот факт отражается третьим законом динамики, сформулированным для случая взаимодействия двух материальных точек (рис. 1.11):

Рис. 1.11.

Если материальная точка m_2 испытывает со стороны материальной точки m_1 силу, равную $\mathbf{F}_{1,2}$, то m_1 испытывает со стороны m_2 силу $\mathbf{F}_{2,1}$, равную по величине и противоположную по направлению $\mathbf{F}_{1,2}$:

$$\boxed{\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}.} \tag{3.8}$$

Эти силы действуют всегда вдоль прямой, проходящей через точки m_1 и m_2, как показано на чертеже. Рис. 1.11, *а* относится к случаю, когда силы взаимодействия между точками являются силами отталкивания. На рис. 1.11, *б* изображен случай притяжения.

В случае произвольно большого множества точек взаимодействие в такой системе согласно третьему закону динамики сводится к парным взаимодействиям между любыми двумя точками. Это означает, что сила, испытываемая, например, материальной точкой m_3 системы, складывается из сил, действующих со стороны точек m_1, m_2, m_4, m_5...:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{1,3} + \mathbf{F}_{2,3} + \mathbf{F}_{4,3} + \ldots$$

При этом, например, сила $\mathbf{F}_{1,3}$ определяется только характером взаимодействия точек m_3 и m_1 и от других точек не зависит.

Часто употребляются сокращенные формулировки третьего закона динамики: «действие равно противодействию» — и ей подобные, в которых не подчеркивается важное обстоятельство: *силы действия и противодействия приложены всегда к различным*

телам и поэтому никогда не уравновешивают друг друга. Если запомнить это последнее обстоятельство, вытекающее из точной формулировки третьего закона динамики, то никогда не возникнет вопроса о том, почему, например, лошадь движет телегу вперед, хотя их взаимные действия друг на друга и равны.

Когда человек идет по земле, то сила, с которой он отталкивает землю назад, равна по величине и направлена обратно той силе, с которой земля отталкивает человека вперед. При равенстве этих сил, однако, согласно второму закону динамики, возникающие ускорения обратно пропорциональны массам, и землю благодаря ее очень большой сравнительно с человеком массе можно считать практически неподвижной.

Подчеркнем наконец, что явления природы протекают одинаково (следовательно, законы природы имеют один и тот же вид) во всех инерциальных системах отсчета. Для классической механики это было установлено Галилеем — «принцип относительности Галилея». Подробнее об этом будет рассказано в томе III нашего курса.

§ 4. Закон сохранения и изменения количества движения (импульса). Реактивное движение

Второй закон Ньютона (3.7) позволяет найти ускорение движущейся точки в каждый данный момент времени. На практике чаще всего необходимо найти изменение движения тела за какой-нибудь определенный промежуток времени. Для решения этой задачи следовало бы применять второй закон динамики бесчисленное число раз, во все промежуточные моменты времени. Поэтому целесообразно предварительно преобразовать основные законы динамики и вывести из них ряд следствий, позволяющих находить конечные скорости тел сразу, без вычисления ускорений и скоростей во всех промежуточных точках. Первым таким практически важным следствием из основных законов динамики является так называемый закон количества движения (часто вместо термина «количество движения» ныне применяется термин «импульс»). Используя (2.6), перепишем второй закон Ньютона (3.7) в виде

$$\mathbf{F} = m \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим конечный, но малый промежуток времени Δt, в течение которого действующая на материальную точку сила $\mathbf{F}$ не успевает заметно измениться ни по величине, ни по направлению. Заменяя тогда в (4.1) величины $\mathbf{F}$ и $\mathbf{w}$ их средними значениями за промежуток времени Δt, получим:

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Для постоянной силы ($\mathbf{F} = \text{const}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{F}/m = \text{const}$) средние значения $\mathbf{F}_{\text{ср}}$ и $\mathbf{w}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ в точности равны их мгновенным значениям $\mathbf{F}$ и $\mathbf{w}$ в каждом промежутке Δt. В случае переменной силы это равенство будет выполняться тем точнее, чем меньше интервал Δt.

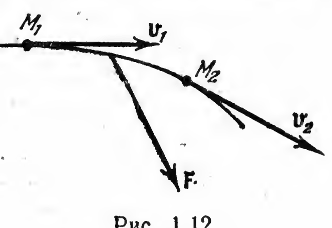


Рис. 1.12.

Обозначим скорость материальной точки в начале промежутка Δt через $\mathbf{v}_1$, а в конце него — через $\mathbf{v}_2$ (рис. 1.12). Тогда $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, и из (4.2) имеем:

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} \Delta t = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \tag{4.3}$$

Вектор $\mathbf{F}_{\text{ср}} \Delta t$, совпадающий по направлению с силой $\mathbf{F}_{\text{ср}}$ и численно равный произведению вектора силы $\mathbf{F}_{\text{ср}}$ на промежуток времени Δt, в течение которого она действовала, называется **элементарным импульсом силы**.

Вектор $m\mathbf{v}$, равный произведению массы m материальной точки на вектор скорости ее движения $\mathbf{v}$, называется **вектором количества движения** точки. Стоящая в правой части равенства (4.3) разность $m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$ представляет собой приращение вектора количества движения за время Δt. Обозначая это приращение через $\Delta(m\mathbf{v})$, получим математическую формулировку закона изменения количества движения:

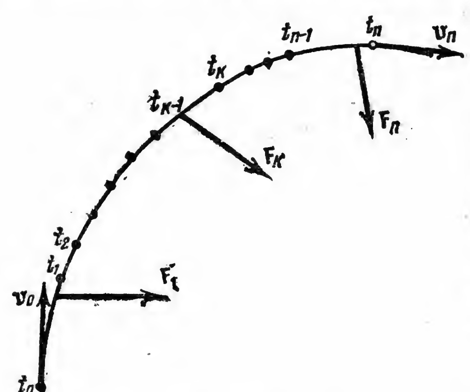


Рис. 1.13.

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} \Delta t = \Delta(m\mathbf{v}). \tag{4.4}$$

Элементарный импульс силы, действовавший на материальную точку в течение промежутка времени Δt, равен изменению ее количества движения за тот же промежуток времени.

В случае переменной силы, действующей в течение достаточно большого промежутка времени, последний следует разбить на достаточно малые элементарные интервалы Δt_k так, чтобы на каждом интервале можно было заменить силу ее средним значением в этом интервале $\mathbf{F}_k$. Перенумеровав все последовательные положения движущейся точки на ее траектории так, как это показано на рис. 1.13, применим равенство (4.4) последовательно к каждому интервалу.

Для первого интервала $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ получим:

$$\mathbf{F}_1 \Delta t_1 = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0.$$

Аналогично, для второго интервала $\Delta t_2 = t_2 - t_1$

$$\mathbf{F}_2 \Delta t_2 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

и для всех последующих

$$\mathbf{F}_3 \Delta t_3 = m\mathbf{v}_3 - m\mathbf{v}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{F}_k \Delta t_k = m\mathbf{v}_k - m\mathbf{v}_{k-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{F}_n \Delta t_n = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_{n-1}.$$

Сложим все эти равенства. Тогда промежуточные значения вектора количества движения попарно сократятся, и мы получим:

$$\mathbf{F}_1 \Delta t_1 + \mathbf{F}_2 \Delta t_2 + \ldots + \mathbf{F}_k \Delta t_k + \ldots + \mathbf{F}_n \Delta t_n = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_0. \quad (4.5)$$

Геометрическая сумма

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{F}_k \Delta t_k$$

элементарных импульсов силы $\mathbf{F}_k \Delta t_k$ называется полным импульсом переменной силы за время $t_n - t_0$. При введенных обозначениях

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{F}_k \Delta t_k = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_0, \quad (4.6)$$

т. е. *полный импульс переменной силы равен полному изменению количества движения за все время действия силы.*

Закон изменения количества движения (4.6) позволяет по начальной скорости $\mathbf{v}_0$ и известному полному импульсу силы находить сразу конечную скорость $\mathbf{v}_n$ без вычисления всех промежуточных скоростей $\mathbf{v}_k$. Вычисление полного импульса

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{F}_k \Delta t_k$$

в общем случае произвольных сил представляет собой довольно сложную задачу, решаемую методами интегрального исчисления. В простейшем случае постоянной силы

$$\sum_k \mathbf{F} \Delta t_k = \mathbf{F} \sum_k \Delta t_k = \mathbf{F}(t_n - t_0). \quad (4.7)$$

Если сила **F** имеет во все время движения одно и то же направление и меняется только по своей величине, то для вычисления полного импульса геометрическая сумма может быть заменена алгебраической $\sum_k F_k \Delta t_k$. В этом случае искомый импульс можно вычислить графически. Построим график изменения величины силы F в зависимости от времени t (рис. 1.14). Разобьем ось абсцисс на указанные выше малые интервалы. На интервале Δt_k проведем пунктиром горизонтальную прямую с ординатой, равной среднему значению величины силы F_k в этом интервале. Тогда площадь заштрихованной на рисунке полоски

$$F_k \Delta t_k \tag{4.8}$$

численно равна элементарному импульсу силы, и полный импульс будет численно равен сумме площадей всех элементарных полосок. Уменьшая величины интервалов Δt_k и увеличивая их число n, в пределе (при $\Delta t_k \to 0$ и $n \to \infty$) получим, что искомый полный импульс силы

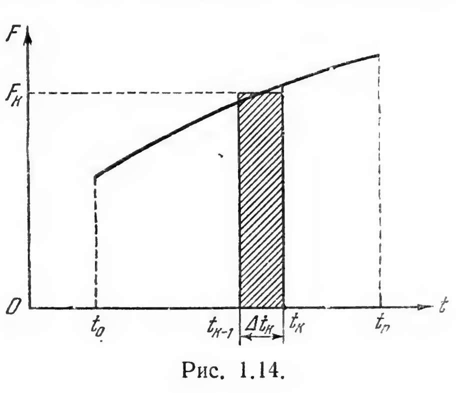


Рис. 1.14.

$$\sum F_k \Delta t_k \tag{4.9}$$

численно равен площади, заключенной на нашем рисунке между кривой $F(t)$, осью абсцисс и двумя ординатами, восставленными в начальной и конечной точках интервала t_0 и t_n. Измеряя указанную площадь, мы получаем возможность графически вычислить величину полного импульса силы.

Если сила **F** меняется не только по величине, но и по направлению, то вектор импульса силы следует разложить на составляющие по трем координатным осям и произвести указанное графическое вычисление для каждой из трех составляющих вектора $\sum_k \mathbf{F}_k \Delta t_k$, а затем геометрически сложить эти три суммы.

Закон изменения количества движения является непосредственным следствием второго закона Ньютона. Используя наряду с ним и третий закон динамики (3.8), можно получить так называемый з а к о н с о х р а н е н и я к о л и ч е с т в а д в и ж е н и я.

Для этого рассмотрим две взаимодействующие материальные точки с массами m_1 и m_2. Обозначим скорости движения этих точек в данный момент времени соответственно через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (рис. 1.15). Если первая из этих точек действует на вторую с силой $\mathbf{F}_{1,2}$, то

вторая из них, согласно третьему закону динамики, действует на первую с силой $\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$. Под действием этих сил за промежуток времени Δt скорости точек получают приращения $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ и их количества движения изменяются соответственно на величины $\Delta(m_1\mathbf{v}_1)$ и $\Delta(m_2\mathbf{v}_2)$. Применяя закон изменения количества движения (4.4) к движению каждой точки в отдельности, мы можем написать:

$$\mathbf{F}_{2,1}\Delta t = \Delta(m_1\mathbf{v}_1), \quad \mathbf{F}_{1,2}\Delta t = \Delta(m_2\mathbf{v}_2). \tag{4.10}$$

Складывая эти два равенства и учитывая, что $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$, получаем:

$$0 = \Delta(m_1\mathbf{v}_1) + \Delta(m_2\mathbf{v}_2) = \Delta(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2). \tag{4.11}$$

Рассматриваемые две материальные точки, взаимодействующие только друг с другом, образуют систему, изолированную от действия всех остальных тел.

Геометрическая сумма количества движения обеих точек $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ называется **количеством движения системы**. Из (4.10) и (4.11) следует, что за время движения количество движения каждой точки в отдельности может меняться, но количество движения системы остается постоянным:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{const}. \tag{4.12}$$

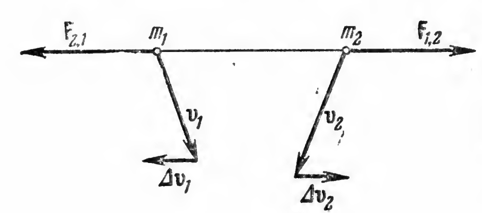


Рис. 1.15.

Аналогичным образом может быть выведен закон сохранения количества движения для системы, состоящей из любого числа материальных точек или тел, взаимодействующих только между собой. *В изолированной системе материальных тел количество движения всей системы в целом остается неизменным:*

$$\sum_i m_i\mathbf{v}_i = \text{const}, \tag{4.13}$$

где m_i — массы отдельных точек системы, а $\mathbf{v}_i$ — их скорости в любой момент времени.

Мы видим, что при механическом движении увеличение количества движения одного тела равно уменьшению количества движения всех остальных взаимодействовавших с ним тел. Взаимодействующие тела обмениваются количествами движения; количество движения переносится от одного тела к другому. Скорость передачи этой величины от одного взаимодействующего тела к другому определяет величину силы взаимодействия. Для каждого из тел в соответствии с (4.4) мы можем записать, что

$$\frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} = \mathbf{F}. \tag{4.14}$$

Действие закона сохранения количества движения мы постоянно наблюдаем в повседневной жизни. Если лодка пристает носом к берегу, а пассажир находится на корме, то когда пассажир начнет идти по лодке со скоростью $\mathbf{v}_1$ к берегу, лодка получит скорость $\mathbf{v}_2$ в обратном направлении и отплывает от берега. Когда за счет действия пороховых газов в стволе орудия происходит выстрел, то количество движения вылетающего снаряда $m_1\mathbf{v}_1$ равно по величине и обратно по знаку количеству движения $m_2\mathbf{v}_2$ откатывающегося назад орудия.

Для уменьшения отката орудия необходимо увеличивать его массу m_2 по сравнению с массой снаряда m_1. В этом отношении значительным преимуществом обладают реактивные снаряды. В ракете или реактивном снаряде происходит постепенное сгорание порохового заряда и истечение горячих пороховых газов назад через соответствующие отверстия (д ю з ы). Рассматривая ракету и вытекающие из нее газы как единую механическую систему, мы можем применить к ней закон сохранения количества движения. Так как вытекающие газы обладают количеством движения, направленным назад, то основная часть ракеты получает движение вперед. Таким образом, всю отдачу при выстреле ракеты воспринимают вытекающие газы, и для запуска реактивного снаряда большого калибра вместо массивного ствола достаточно простой и легкой направляющей рамы.

Принцип реактивного движения ныне широко применяется для полетов. Мысль о возможности такого применения реактивного движения была впервые высказана в 1881 г. казненным царским правительством известным революционером Кибальчичем.

Дальнейшее развитие эта мысль получила в работах «пионера звездных дорог» К. Э. Циолковского.

Современные реактивные самолеты уже достигли сверхзвуковых скоростей полета. С помощью ракет запускаются искусственные спутники Земли и космические корабли, имеющие еще большие начальные скорости 8—11 км/с.

§ 5. Работа сил и кинетическая энергия

За бесконечно малый промежуток времени Δt материальная точка M пройдет элементарный путь Δs по траектории и переместится в пространстве на величину $\Delta\mathbf{r}$. На этом участке на точку может действовать сила $\mathbf{F}$, направленная под некоторым углом α к перемещению $\Delta\mathbf{r}$ (рис. 1.16).

Скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения называется элементарной р а б о т о й с и л ы $\mathbf{F}$ на бесконечно малом перемещении $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}\ ^{*}). \tag{5.1}$$

*) Здесь и далее символ Δ перед буквой A означает не приращение работы (как для остальных величин), а указывает лишь на малость элементарной работы.

Скалярное произведение двух векторов равно произведению абсолютных значений этих векторов на косинус угла между ними, и

$$\Delta A = F\,|\Delta \mathbf{r}|\cos\alpha. \tag{5.2}$$

Если угол α — острый, то $\cos\alpha > 0$ и работа, совершаемая силой при перемещении точки, положительна. При $\alpha = \pi/2$, когда сила перпендикулярна к перемещению, $\cos(\pi/2) = 0$; такая сила работы не совершает. Если угол α — тупой, то сила действует против направления перемещения $\Delta\mathbf{r}$, $\cos\alpha < 0$ и работа силы отрицательна.

Выражения (5.1) и (5.2) можно переписать в виде

$$\Delta A = F\cos\alpha\,|\Delta\mathbf{r}| = F_{\text{к}}\,|\Delta\mathbf{r}|, \tag{5.3}$$

где $F_{\text{к}} = F\cos\alpha$ есть проекция силы F на направление перемещения. В пределе (при $\Delta t \to 0$) величина перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ согласно (1.3) стремится к отрезку дуги Δs, пройденному движущейся точкой, а направление перемещения $\Delta\mathbf{r}$ стремится к направлению касательной к траектории. Поэтому выражение (5.3) можно переписать в виде

$$\Delta A = F_{\text{к}}\,\Delta s. \tag{5.4}$$

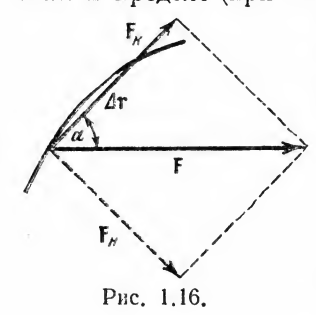


Рис. 1.16.

Раскладывая, как показано на рис. 1.16, вектор силы на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{к}} + \mathbf{F}_{\text{н}}, \tag{5.5}$$

мы видим, что в пределе вектор $\mathbf{F}_{\text{к}}$ направлен по касательной, а вектор $\mathbf{F}_{\text{н}}$ — соответственно по нормали к траектории. Из приведенного выше определения работы следует, что ее совершает лишь касательная составляющая силы $\mathbf{F}_{\text{к}}$, а работа нормальной составляющей $\mathbf{F}_{\text{н}}$ равна нулю.

Из определения работы (5.2) можно установить единицы ее измерения. В системе СГС единица работы 1 эрг = 1 дин·1 см = = 1 г·см²/с². В системе СИ единица работы 1 джоуль (дж) = = 1 Н·1 м = 10^5 дин·10^2 см = 10^7 эрг. Наконец, в технической системе единиц — единица работы 1 кгс·м = 1 кгс·1 м = 9,81 Дж.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется **мощностью**:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \tag{5.6}$$

Единица мощности в системе СИ — 1 ватт (Вт) = 1 Дж/с = = 10^7 эрг/с.

Перейдем теперь к определению новой важной физической величины — **кинетической энергии** материальной точки.

По второму закону Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$. Следовательно, входящая в выражение (5.4) касательная составляющая силы равна по величине

$$F_{\text{к}} = m w_{\text{к}} = m \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{5.7}$$

где согласно (2.11) $w_{\text{к}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ — касательное ускорение. Подставляя (5.7) в (5.4), получаем для элементарной работы выражение

$$\Delta A = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta s = m \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta v = mv \cdot \Delta v. \tag{5.8}$$

Рассмотрим теперь конечный промежуток времени t. Как на рис. 1.13, разобьем время и путь на достаточно малые элементарные интервалы. Обозначим аналогично соответствующие значения величины скорости в моменты t_i через v_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Среднее значение величины скорости на данном интервале $\bar{v}_i = \frac{v_i + v_{i-1}}{2}$, а ее приращение $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$. Тогда выражение (5.8) для элементарной работы на этом участке может быть приведено к виду

$$\Delta A_i = m\bar{v}_i \cdot \Delta v_i = m \frac{v_i + v_{i-1}}{2} (v_i - v_{i-1}) = \\ = \frac{mv_i^2}{2} - \frac{mv_{i-1}^2}{2} = \Delta \left(\frac{mv_i^2}{2} \right). \tag{5.9}$$

Символом Δ здесь обозначено приращение величины $^1/_2\, mv^2$ на i-м интервале пути. Эта величина носит название к и н е т и ч е с к о й э н е р г и и движущейся материальной точки и будет нами обозначаться буквой K:

$$K = \frac{mv^2}{2}. \tag{5.10}$$

На элементарном малом перемещении имеем

$$\Delta A = \Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \Delta K. \tag{5.11}$$

Для нахождения полного изменения величины скорости от значения v_0 до значения v_n на всем пути определим полную работу силы на этом пути $A_{0,n}$ как алгебраическую сумму всех элементарных работ

$$A_{0,\,n} = \sum_0^n \Delta A_i = \sum_0^n F_{\text{к},\,i} \cdot \Delta s_i. \tag{5.12}$$

При известной зависимости касательной составляющей силы $F_{\text{к}}$ от пути s эта сумма может быть вычислена графически, как на рис. 1.14, или, более точно, методами интегрального исчисления. Используя выражения (5.9) для элементарных работ и сокращая,

как при выводе выражения (4.5), все промежуточные члены $\pm {}^1/_2\, mv_i^2$, получим окончательно:

$$A_{0,\,n} = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = K_n - K_0, \qquad (5.13)$$

т. е. *полная работа силы на некотором пути численно равна разности кинетических энергий материальной точки в конечном и начальном ее положениях*. Очевидно, что единицы измерения кинетической энергии те же, что и единицы измерения работы (эрг, Дж, кгс·м), хотя это — *различные* физические величины.

Уравнение (5.13) показывает, что работа, совершенная внешними силами, действующими на тело (материальную точку), затрачивается на *приращение* его кинетической энергии. Если работа положительна $A_{0,n} > 0$, то приращение $K_n - K_0 > 0$, т. е. $K_n > K_0$, и кинетическая энергия тела возрастает. Если же работа отрицательна (действие сил направлено против движения тела и тормозит его), то приращение кинетической энергии отрицательно и кинетическая энергия убывает. Как видно из (5.10), кинетическая энергия материальной точки (тела) зависит только от ее массы m и величины скорости v. От положения материальной точки в пространстве кинетическая энергия не зависит.

§ 6. Потенциальная энергия. Закон сохранения и превращения энергии

В рассмотренном выше случае работа силы **F**, приложенной к материальной точке, затрачивалась на изменение кинетической энергии движущейся точки. Однако кроме кинетической энергии — энергии движения — существует еще один вид механической энергии, обусловленный взаимным расположением тел, действующих друг на друга. Эта энергия носит название потенциальной энергии.

Сила **F**, приложенная к материальной точке M, является всегда результатом воздействия на эту точку других окружающих ее тел. В зависимости от расположения точки M относительно воздействующих на нее тел эта сила может быть различна. В этом случае мы говорим о поле сил, создаваемых данными телами. Так, например, сила земного притяжения, действующая на материальную точку с массой m, на разных расстояниях от земли различна и по величине и по направлению. Вокруг земного шара имеется поле сил тяготения, действующих на точку M. Аналогичный характер носит поле электрических сил при взаимодействии электрически заряженных тел.

Поместим материальную точку M в силовое поле и обозначим ее радиус-вектор через **r**. В данном положении на точку M будет действовать определенная сила **F** (рис. 1.17). Чтобы точка M не

начала двигаться и не приобрела кинетической энергии, уравновесим эту силу внешней по отношению к системе силой $\mathbf{F}'$, равной ей по величине и обратной по направлению:

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F}. \tag{6.1}$$

Чтобы вся система, состоящая из точки M и воздействующих на нее тел (не показанных на рисунке), оставалась неизменной, ко всем остальным телам также нужно приложить соответствующие внешние силы, уравновешивающие их взаимодействия.

Предположим теперь, что сила $\mathbf{F}'$ не в точности уравновешивает силу $\mathbf{F}$, но отличается от последней на бесконечно малую величину $\Delta\mathbf{F}'$. Тогда точка M начнет бесконечно медленно двигаться в направлении $\Delta\mathbf{F}'$ и за достаточно большой промежуток времени переместится на величину $\Delta\mathbf{r}$. Скорость перемещения точки M будет при этом бесконечно мала и может практически считаться равной нулю. В соответствии с этим можно считать равной нулю и кинетическую энергию материальной точки.

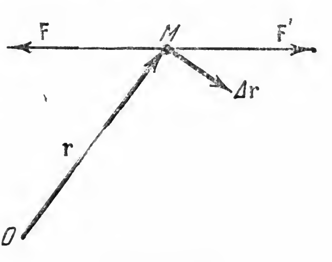


Рис. 1.17.

В процессе перемещения материальной точки на $\Delta\mathbf{r}$ внешняя сила $\mathbf{F}'$ совершает работу

$$\Delta A' = \mathbf{F}' \cdot \Delta\mathbf{r}, \tag{6.2}$$

хотя материальная точка M не приобретет никакой кинетической энергии K. Очевидно, что в результате совершенной работы произошло увеличение какой-то другой формы энергии, зависящей от изменения положения точки M в силовом поле.

Этот новый вид энергии, определяющейся не скоростью точки, но ее положением в силовом поле, и есть потенциальная энергия.

Обозначим через ΔU изменение потенциальной энергии при перемещении точки в силовом поле на $\Delta\mathbf{r}$. Изменение потенциальной энергии ΔU может быть определено по величине работы, произведенной внешними силами при перемещении на $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta U = \Delta A' = \mathbf{F}' \cdot \Delta\mathbf{r}. \tag{6.3}$$

Поскольку $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$, то

$$\Delta A' = \mathbf{F}' \cdot \Delta\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = -\Delta A, \tag{6.4}$$

где ΔA есть работа, совершаемая внутренними силами системы на том же перемещении $\Delta\mathbf{r}$. Используя соотношение (6.4), мы можем для определения изменения потенциальной энергии ΔU, не прибегая к внешней силе, написать непосредственно, что

$$\Delta A = -\Delta U. \tag{6.5}$$

Таким образом, *работа, совершаемая силами* **F**, *действующими на материальную точку при ее перемещении, равна уменьшению ее потенциальной энергии*, зависящей от расположения точки в силовом поле.

Равенство это следует понимать алгебраически. Если работа сил положительна ($\Delta A > 0$), то потенциальная энергия уменьшается ($\Delta U < 0$). Если же работа сил отрицательна ($\Delta A < 0$), то потенциальная энергия возрастает ($-\Delta U < 0$, т. е. $\Delta U > 0$).

Для вычисления работы $A_{\text{I,II}}$ при смещении точки на конечное расстояние от $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{I}}$ до $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{II}}$ вся ее траектория разбивается на отдельные бесконечно малые перемещения $\Delta \mathbf{r}_i$, на каждом из которых силу $\mathbf{F}_i$ можно считать практически постоянной по величине и направлению. Складывая элементарные работы ΔA_i на каждом из таких участков, можно определить полную работу

$$A_{\text{I, II}} = \sum_{\text{I}}^{\text{II}} \Delta A_i = \sum_{\text{I}}^{\text{II}} \mathbf{F}_i \, \Delta \mathbf{r}_i.$$

Полное изменение потенциальной энергии

$$\sum_{\text{I}}^{\text{II}} \Delta U_i = U_{\text{II}} - U_{\text{I}}$$

будет равно разности потенциальных энергий в конечной (U_{II}) и начальной (U_{I}) точках траектории. Учитывая (6.5), мы получаем окончательно, что

$$U_{\text{II}} - U_{\text{I}} = -A_{\text{I, II}}. \qquad (6.6)$$

Приведенный вывод равенства (6.6) нуждается в некоторых дополнениях и оговорках.

Во-первых, не для всяких сил взаимодействия можно определить потенциальную энергию. Из (6.6) следует, что потенциальная энергия в каждой точке имеет вполне определенное значение, лишь если работа $A_{\text{I,II}}$ будет одинаковой вдоль любой траектории, соединяющей начальную точку I с конечной точкой II. Если же величина работы $A_{\text{I,II}}$ зависит не только от положения начальной и конечной точек, а и от формы пути или скорости перехода, то величины U_{I} и U_{II} в (6.6) становятся неопределимыми, и такое поле не обладает определенной потенциальной энергией.

Как мы увидим ниже, поле тяжести и электростатические поля обладают потенциальной энергией. В противоположность этому при наличии сил трения или магнитных взаимодействий силы зависят не только от взаимного расположения, но и от скорости движения взаимодействующих тел, и такое поле не обладает определенными значениями потенциальной энергии.

Второе замечание связано с тем, что по третьему закону динамики (3.8) наряду с силой **F**, действующей на точку M, последняя

действует на окружающие тела с суммарной силой — **F**. Если оставить точку M неподвижной, а все взаимодействующие с ней тела переместить в противоположном направлении на величину $-\Delta \mathbf{r}$, то будет совершена та же самая работа

$$(-\mathbf{F}) \cdot (-\Delta \mathbf{r}) = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = \Delta A$$

и потенциальная энергия изменится на ту же самую величину

$$\Delta U = -\Delta A.$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии ΔU зависит от относительного изменения взаимного расположения взаимодействующих тел. Следовательно, потенциальная энергия U относится не только к точке M, но и ко всей системе и представляет собой *энергию взаимодействия* тел. В частности, если мы рассматриваем потенциальную энергию камня, поднятого на некоторую высоту над земной поверхностью, то потенциальная энергия сил земного притяжения есть энергия взаимодействия камня и Земли. Связывая, как обычно, систему отсчета с Землей, мы будем предполагать Землю неподвижной и условно говорить о потенциальной энергии поднятого камня (по отношению к Земле).

Наконец, следует указать, что формула (6.6) не дает полного определения величины потенциальной энергии в каждой точке, а определяет лишь изменение потенциальной энергии при переходе из одной точки в другую.

Абсолютная же величина U остается зависящей от выбора начала отсчета потенциальной энергии, т. е. той точки, в которой потенциальная энергия условно полагается равной нулю. Обычно за начало отсчета выбирают такое положение, при котором взаимодействие практически отсутствует, например когда взаимодействующие тела бесконечно удалены друг от друга.

Если изменить начало отсчета, то значения потенциальной энергии во всех точках изменятся на одну и ту же постоянную величину C, т. е.

$$U = U(\mathbf{r}) + C. \qquad (6.7)$$

Разности же энергий $U_{II} - U_{I}$ при этом остаются неизменными, так как при вычитании произвольная постоянная C, входящая одинаково в U_{II} и в U_{I}, сокращается.

При движении материальной точки с массой m в силовом поле будут изменяться и ее кинетическая, и ее потенциальная энергии. Как было найдено в предыдущем параграфе (см. (5.11)), для элементарного перемещения изменение кинетической энергии равно

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \Delta A. \qquad (6.8)$$

Согласно формуле (6.5) изменение потенциальной энергии при том же перемещении равно

$$\Delta U = -\Delta A. \tag{6.9}$$

Складывая выражения (6.8) и (6.9), получим:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) + \Delta U = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0. \tag{6.10}$$

Но если приращение какой-либо величины равно нулю, то это значит, что сама величина является постоянной:

$$\frac{mv^2}{2} + U = E = \text{const}. \tag{6.11}$$

Величина E, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, называется полной энергией материальной точки. Полученная формула (6.11) является математическим выражением закона сохранения энергии в механике.

При движении тела происходит непрерывное превращение кинетической его энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия тела остается неизменной. Следовательно, как указывает Энгельс, этот закон не есть просто закон количественного сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и качественную сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Движение материи неуничтожимо, но формы этого движения многообразны и постоянно переходят друг в друга.

В дальнейших разделах физики мы познакомимся с другими формами движения — тепловой, электромагнитной, внутриядерной — и с характеризующими их формами энергии. Как показывает весь опыт науки, закон сохранения и превращения энергии является одним из основных законов природы.

Возвращаясь к механике, мы должны дать формулировку закона сохранения энергии для системы многих материальных точек:

Полная энергия изолированной системы материальных точек, равная сумме кинетических энергий точек и потенциальной энергии их взаимодействия, есть величина постоянная:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i,k} U_{i,k} = \text{const}. \tag{6.12}$$

Здесь m_i — масса i-й точки, v_i — ее скорость, $U_{i,k}$ — потенциальная энергия взаимодействия i-й и k-й точек.

Если в системе перемещается лишь одна из точек, то, поскольку изменение потенциальной энергии связано лишь с ее движением, эту потенциальную энергию приписывают ей и закон сохранения энергии имеет вид (6.11).

§ 7. Потенциальная энергия тяготения и упругих деформаций

Вычислим величину потенциальной энергии в простейших, но важных для дальнейшего случаях — для тяготения и для упругих деформаций.

Ньютон установил закон всемирного тяготения, изучая законы движения небесных тел. Согласно этому закону материальные точки с массами M и m, находящиеся на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой F, равной по величине

$$F = \varkappa \frac{Mm}{r^2}. \tag{7.1}$$

Здесь $\varkappa$ — гравитационная постоянная, или постоянная тяготения:

$$\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2). \tag{7.2}$$

Земля не является «материальной точкой» для тел, расположенных на ее поверхности. Но, как показывает теория, сила, с которой Земля притягивает тела, расположенные вне ее, численно в точности равна силе, которую создавала бы материальная точка с массой M, равной массе Земли, и расположенная в центре Земли. В соответствии с законом тяготения на материальную точку с массой m со стороны Земли будет действовать сила тяжести, равная

$$F_{\text{тяж}} = \varkappa \frac{Mm}{R^2}, \tag{7.3}$$

где R — расстояние от точки m до центра Земли. При малых перемещениях (порядка нескольких километров от поверхности Земли) изменениями R можно пренебречь, считая R постоянной величиной, равной радиусу Земли ($R_З$ = 6370 км). Тогда (7.3) можно переписать так:

$$F_{\text{тяж}} = \frac{\varkappa M}{R^2} \cdot m = g \cdot m, \tag{7.4}$$

где g имеет смысл ускорения, с которым движутся под действием силы тяжести все материальные тела у поверхности Земли. Численное значение этого ускорения свободного падения равно примерно

$$g = \frac{\varkappa M}{R^2} = 9{,}8 \text{ м/с}^2$$

(в силу несферичности Земли и ее вращения величина g несколько меняется с изменением географической широты, на чем мы здесь останавливаться не будем).

При перемещении массы m с одной высоты на другую сила тяжести совершает работу. Следовательно, меняется потенциальная энергия системы Земля — масса m. Обычно при этом говорят

о потенциальной энергии тела m, однако следует помнить, что здесь, как и в любом другом случае, потенциальная энергия есть энергия взаимодействия Земли и материальной точки массы m.

Вычислим теперь ее значение для перемещений m лишь вблизи поверхности Земли, так что высота подъема ничтожна по сравнению с радиусом Земли. В этом случае силу тяготения $\mathbf{F}_{тяж}$, действующую на m со стороны Земли, можно считать постоянной (не зависящей от высоты) и направленной к центру Земли.

Направим ось OZ вертикально вверх. В такой системе отсчета сила тяжести $\mathbf{F}_{тяж}$ будет иметь составляющую только по оси OZ, которую мы обозначим через F_z (рис. 1.18). Напомним еще раз, что эта сила постоянна, т. е. не зависит от z. По величине она равна

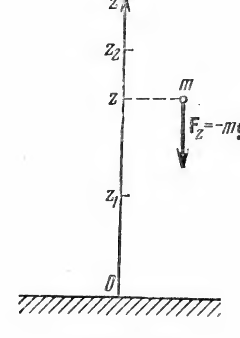


Рис. 1.18.

$$F_z = -mg. \tag{7.5}$$

Поднимем точку m с высоты z_1 на высоту z_2. При этом сила тяжести совершит работу

$$A_{1,\,2} = F_z \cdot (z_2 - z_1) = -mg \cdot (z_2 - z_1) = \\ = mgz_1 - mgz_2. \tag{7.6}$$

Обозначим потенциальную энергию точки m на высоте z_1 через U_1, а на высоте z_2 — через U_2. Тогда согласно (6.6)

$$A_{1,\,2} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2. \tag{7.7}$$

Из (7.6) и (7.7) следует, что

$$U_1 - U_2 = mgz_1 - mgz_2. \tag{7.8}$$

Одно уравнение (7.8) не позволяет определить обе входящие в него неизвестные величины U_1 и U_2. Поэтому наряду с простейшим решением

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= mgz_1, \\ U_2 &= mgz_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

это уравнение допускает еще бесчисленное множество решений

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= mgz_1 + C, \\ U_2 &= mgz_2 + C, \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

отличающихся от решения (7.9) значением произвольной постоянной C.

Так как z_1 и z_2 могут быть любыми, то потенциальная энергия поля тяжести $U(z)$ на заданной высоте z над уровнем земли согласно (7.10) выражается общей формулой:

$$U(z) = mgz + C. \tag{7.11}$$

Неопределенность численного значения потенциальной энергии связана, как уже отмечалось выше, с тем, что соотношение (6.6)

определяет лишь разность потенциальных энергий в двух положениях, но не указывает, в каком из них она равна нулю. Тем самым выбор начала отсчета оказывается произвольным. Если мы условимся отсчитывать потенциальную энергию от уровня земли, т. е. положим, что при $z = 0$ и $U(0) = 0$, то произвольная постоянная C в уравнении (7.11) также обратится в нуль, а значения потенциальной энергии при $z < 0$, т. е. в яме, будут считаться отрицательными.

Вычислим теперь потенциальную энергию для другого силового закона — упругих деформаций. Рассмотрим тело массы m, подвешенное на пружине, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с m. Ось OX направим вертикально вниз, как на рис. 1.19. Под действием веса тела mg пружина растянется на некоторую величину, пока ее сила упругости не уравновесит вес груза. Отсчет перемещений x и упругих сил будем вести от этого положения равновесия и тем самым исключим из рассмотрения влияние уравновешенной силы тяжести. Сместим груз из положения равновесия на некоторое расстояние, как это показано пунктиром. При этом пружина растянется на величину x и в ней возникнет упругая сила $\mathbf{F}_{\text{упр}}$, стремящаяся возвратить груз в положение равновесия. При небольших деформациях, по закону Гука, проекция этой силы на ось OX равна

$$F_x = -kx, \tag{7.12}$$

Рис. 1.19.

т. е. *упругая сила прямо пропорциональна смещению и направлена в обратную сторону* (знак минус). При $x > 0$ (растяжение) $F_x < 0$, а при $x < 0$ (сжатие) $F_x > 0$. Коэффициент пропорциональности k (дин/см, Н/м или кгс/мм) называется жесткостью пружины и показывает, какую силу надо приложить, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины ($F = k$ при $x = -1$). Сообщим грузу дополнительное бесконечно малое смещение Δx. При этом сила упругости совершит работу $\Delta A = F_x \cdot \Delta x$ и потенциальная энергия груза изменится на величину $\Delta U = -\Delta A$. Тогда согласно (7.12)

$$\Delta U = -\Delta A = -F_x \cdot \Delta x = -(-kx) \cdot \Delta x = kx \cdot \Delta x. \tag{7.13}$$

Будем растягивать пружину из положения равновесия ($x = 0$) до какого-то конечного смещения x. Разбивая весь путь на бесконечно малые участки Δx и используя (7.13), найдем изменение потенциальной энергии

$$U(x) - U(0) = \sum_0^x kx \cdot \Delta x. \tag{7.14}$$

Мы уже видели в § 5, что произведение типа $x \cdot \Delta x$ можно представить как приращение величины $x^2/2$, и, следовательно, в нашем примере

$$\Delta U = \Delta\left(\frac{kx^2}{2}\right). \qquad (7.15)$$

Если бесконечно малые приращения двух величин U и $kx^2/2$ равны между собой, то такое равенство сохранится и для любых конечных приращений тех же величин. Будем растягивать пружину из положения равновесия ($x = 0$) до какого-то конечного смещения x. Тогда из (7.15) следует, что

$$U(x) - U(0) = \frac{kx^2}{2} - \frac{k \cdot 0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{0 + kx}{2}(x - 0). \qquad (7.16)$$

Последнее преобразование показывает еще, что приращение потенциальной энергии может быть приравнено работе против сил упругости на всем перемещении $x - 0$, причем, поскольку сила F_x на этом пути непрерывно менялась, то при вычислении работы надо взять ее среднее арифметическое значение $|\bar{F}_x| = \frac{0 + kx}{2}$.

Чтобы избавиться от неопределенной постоянной в выражении для потенциальной энергии, выберем начало отсчета в положении равновесия, т. е. положим $U(0) = 0$. Тогда окончательно

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \qquad (7.17)$$

Величина U есть энергия взаимного расположения частей пружины — потенциальная энергия деформированной пружины.

Выражение (7.17) симметрично относительно знака смещения. При растяжении или сжатии пружины потенциальная энергия деформации возрастает по одному и тому же закону.

Если мы выведем груз, связанный с пружиной, из положения равновесия, то он будет двигаться. В силу закона сохранения энергии при движении груза (при отсутствии трения) сумма кинетической и потенциальной энергий груза будет сохраняться:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \qquad (7.18)$$

Когда груз проходит через положение равновесия ($x = 0$), его потенциальная энергия минимальна и равна нулю, а кинетическая — максимальна и равна полной энергии E. Через положения равновесия груз будет проходить с максимальной скоростью.

В моменты остановок груза ($v = 0$) и изменения направления движения груза на обратное его кинетическая энергия минимальна и равна нулю, а потенциальная — максимальна и равна полной энергии E. Следовательно, в моменты остановок груза его смещение x по абсолютной величине будет максимальным.

Вернемся теперь к первому примеру и рассмотрим более общий случай, когда расстояние между тяготеющими телами много больше их размеров. Оба тела тогда можно считать материальными точками, и гравитационная сила между ними определяется выражением (7.1). Считая более массивную точку M неподвижной (телом отсчета), определим относительное положение второй точки m радиусом-вектором $\mathbf{r}$, как это показано на рис. 1.20. Гравитационная сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ направлена против радиуса-вектора и ее проекция на последний отрицательна, т. е.

$$F_r = -\varkappa \frac{Mm}{r^2}. \tag{7.19}$$

Переместим теперь точку m из положения r_1 в положение r_2 вдоль радиуса. При таком перемещении на расстояние $\Delta r = r_2 - r_1$ гравитационная сила совершит работу

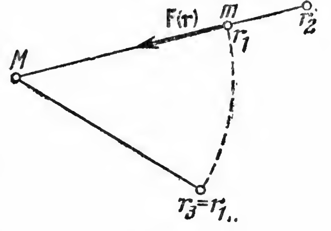


Рис. 1.20.

$$\Delta A = \bar{F}_r \cdot \Delta r = -\varkappa \frac{Mm}{r_1 \cdot r_2}(r_2 - r_1) = \\ = \frac{\varkappa Mm}{r_2} - \frac{\varkappa Mm}{r_1} = \Delta\left(\frac{\varkappa Mm}{r}\right). \tag{7.20}$$

Поскольку в процессе перемещения сила F_r не оставалась постоянной, то при определении ее среднего значения $\bar{F}_r$ мы заменили r^2 на среднюю геометрическую из крайних значений r величину $r_1 \cdot r_2$. Из общего определения (6.5) тогда получим:

$$\Delta U = -\Delta\left(\frac{\varkappa Mm}{r}\right),$$

откуда

$$U(r) = -\varkappa \frac{Mm}{r} + C. \tag{7.21}$$

При перемещении по окружности из положения r_1 в положение $r_3 = r_1$ сила все время перпендикулярна перемещению, не совершает работы и не изменяет потенциальную энергию: $\Delta U = 0$ при $r_3 = r_1$. Таким образом, соотношение (7.21) справедливо для любой точки данного гравитационного поля. Произвольную постоянную C обычно полагают равной нулю, т. е. считают потенциальную энергию притяжения масс M и m равной нулю при $r = \infty$, когда эти массы бесконечно удалены друг от друга и не взаимодействуют ($F_r = 0$ при $r = \infty$).

При движении планеты вокруг Солнца под действием центральной (всегда направленной к центру) силы (7.19) выполняется закон сохранения полной энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} - \varkappa \frac{Mm}{r} = \text{const}. \tag{7.22}$$

При $E < 0$ движение ограничено ($r < \varkappa Mm / |E|$) и планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис. 1.21). Тело, влетевшее в Солнечную систему с положительной полной энергией $E > 0$, движется по незамкнутой орбите (парабола, гипербола) и покидает Солнечную систему с конечной скоростью $v_\infty = \sqrt{2E/m}$ при $r = \infty$.

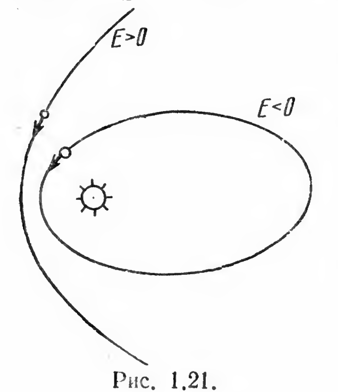


Рис. 1.21.

Из рассмотренных трех примеров видно, что при степенной зависимости F от расстояния показатель степени в выражении для потенциальной энергии U на единицу выше показателя степени в выражении для силы F. Это обстоятельство связано с общими правилами дифференциального исчисления. Действительно, переходя в общем выражении типа (7.13) к пределу и заменяя приращения дифференциалами, получаем $dU = -F_x\,dx$, или

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \tag{7.23}$$

т. е. сила равна производной от потенциальной энергии по соответствующей координате (лишь с обратным знаком). По правилам же дифференцирования степенной функции имеем

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}. \tag{7.24}$$

§ 8. Центральный удар шаров

В предыдущих параграфах мы познакомились с двумя важными законами механики: законом сохранения количества движения и законом сохранения энергии. Разберем конкретный пример, который покажет, как можно пользоваться этими законами сохранения для решения некоторых практически важных задач.

Рассмотрим удар двух шаров, центры которых движутся вдоль одной прямой (рис. 1.22, *а*, *б*). Шары движутся друг другу навстречу или движущийся позади шар m_1 догоняет передний шар m_2. В обоих случаях, при учете знаков скоростей выполняется соотношение $v_1 > v_2$. При этом в некоторый момент времени произойдет удар шаров, называемый (при указанных условиях для центров шаров) центральным ударом.

Рассмотрим сначала идеализированный случай абсолютно упругого удара, при котором не возникает тепла, т. е. сохраняется вся механическая энергия системы. В данном случае эта энергия складывается только из кинетических энергий

шаров, а потенциальная энергия равна нулю (строго говоря, за исключением короткого момента соприкосновения шаров, когда они деформируются; но это, как мы увидим дальше, несущественно).

Для решения задачи о столкновении шаров необходимо, казалось бы, знать, какие силы возникают при столкновении и как эти силы изменяются со временем, что весьма сложно. Однако поставленную задачу можно решить, не прибегая непосредственно к уравнениям динамики и не внося никаких предположений о характере сил, возникающих в процессе самого удара. Это можно сделать, используя законы сохранения.

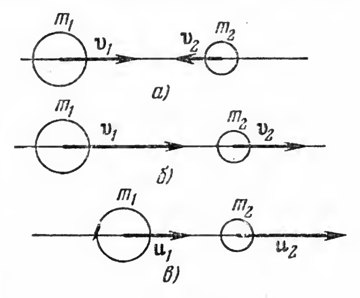


Рис. 1.22.

Обозначим скорости шаров, имеющих массы m_1 и m_2, до удара через v_1 и v_2, а после удара — через u_1 и u_2 соответственно (рис. 1.22, *в*). Как m_1 и m_2, так и v_1 и v_2 заданы. Требуется найти u_1 и u_2.

Так как удар центральный и движение одномерное, то в дальнейшем символы векторов опущены и все геометрические суммы заменены алгебраическими. При этом положительное значение скорости будет приписываться движению вправо, отрицательное — движению влево.

В применении к рассматриваемой задаче закон сохранения количества движения имеет вид

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2, \tag{8.1}$$

т. е. количество движения системы до столкновения должно быть равно количеству движения системы после столкновения.

Аналогично, закон сохранения энергии дает:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \tag{8.2}$$

Перенося члены, относящиеся к m_1, влево, а к m_2 — вправо и сокращая (8.2) на 1/2, получаем вместо (8.2) и (8.1) уравнения

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2), \tag{8.3}$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2). \tag{8.4}$$

Разделив почленно первое из этих уравнений на второе, получаем:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2, \tag{8.5}$$

освобождаясь, таким образом, от квадратов в уравнениях. Решая совместно уравнения (8.4) и (8.5), легко находим:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \\ &= \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2m_1v_1}{m_2 + m_1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Для анализа полученного результата разберем несколько практически важных частных случаев, представляющих интерес для дальнейших разделов курса (молекулярная физика).

1. Соударение одинаковых шаров. Тогда $m_1 = m_2$, и

$$u_1 = v_2, \quad \text{а} \quad u_2 = v_1. \tag{8.7}$$

При упругом центральном ударе двух тел одинаковой массы последние просто обмениваются скоростями. Этот случай используется в ядерной физике для регистрации нейтронов. Поскольку масса нейтрона практически равна массе протона — ядра атома водорода, то при направлении пучка быстрых нейтронов на пластину из содержащего водород соединения (например, парафина) из последней вылетают выбитые протоны с такой же скоростью (рис. 1.23), и эти быстрые заряженные частицы уже легко регистрируются по производимой ими ионизации воздуха.

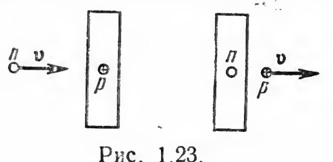


Рис. 1.23.

2. Удар шара о массивную стенку (например, удар молекулы газа о стенку цилиндра или о поверхность поршня). В этом случае $m_2 \gg m_1$ (рис. 1.24), и на основании (8.6) получим приближенно

$$\left.\begin{aligned} u_1 &\approx -v_1 + 2v_2, \\ u_2 &\approx v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \approx v_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

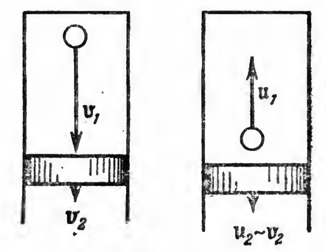


Рис. 1.24.

Как видно из (8.8), скорость массивного тела после удара меняется незначительно. В результате удара стенке передается значительная доля количества движения

$$m_2u_2 - m_2v_2 = 2m_1v_1,$$

но сравнительно небольшая часть энергии ударяющегося шара. Если стенка была первоначально неподвижной ($v_2 = 0$), то упруго ударившийся о нее шарик малой массы отскочит обратно практически с той же скоростью ($u_1 \approx -v_1$) и энергией.

При ударе о движущуюся стенку происходит обмен энергией тем больший, чем больше скорость ее движения v_2. Когда массивный поршень движется навстречу легкому шарику (например, при сжатии газа в цилиндре), то $v_2 < 0$ и согласно (8.8)

$$|u_1| = v_1 + 2|v_2| > v_1.$$

Следовательно, шарик отскакивает назад с бóльшими по величине скоростью и кинетической энергией, чем он имел до столкновения.

Если ударяющийся шарик догоняет уходящий от него поршень (при расширении газа в цилиндре), то $v_2 > 0$ и согласно (8.8) $|u_1| = v_1 - 2v_2 < v_1$. В этом случае шарик отскакивает назад со скоростью и энергией меньшими, чем до столкновения; при ударе часть кинетической энергии шарика передается поршню.

При ударе в зависимости от свойств вещества, из которого состоят шары (медь, сталь, слоновая кость), бо́льшая или меньшая часть энергии перейдет в тепло. Тело при этом испытает необратимую (пластическую) деформацию.

Крайним случаем этого положения является абсолютно неупругий удар (рис. 1.25). При таком ударе шары деформируются, и возникающие между ними силы взаимодействия будут тормозить ударяющийся шар и ускорять ударяемый до тех пор, пока скорости обоих шаров не сравняются. В этот момент суммарная кинетическая энергия обоих шаров уменьшится по сравнению с первоначальным ее значением до удара, так как часть ее будет затрачена на преодоление сопротивлений и перейдет в различные другие формы энергии (тепло, энергию пластических деформаций и т. д.).

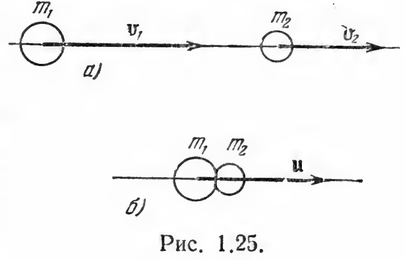


Рис. 1.25.

При полном отсутствии упругих деформаций процесс удара на этом заканчивается, взаимодействие шаров прекращается, и оба шара будут продолжать двигаться далее совместно с одной и той же скоростью u. Для определения скорости после удара достаточно одного уравнения, даваемого законом сохранения количества движения:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,u, \tag{8.9}$$

откуда

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.10}$$

Легко вычислить потерю системой механической энергии E', перешедшей в тепло и другие формы энергии. Она равна разности энергий до и после удара:

$$E' = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\,u^2}{2}. \tag{8.11}$$

Подставляя сюда значение u из (8.10), легко находим:

$$E' = \frac{m_1m_2}{2\,(m_1 + m_2)} \cdot (v_1 - v_2)^2. \tag{8.12}$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \tag{8.13}$$

и

$$E' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2}. \tag{8.14}$$

Когда неподвижное тело имеет очень большую массу ($m_2 \gg m_1$), то $u \ll v_1$ и почти вся кинетическая энергия ударяющегося тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому в кузницах делают массивные наковальни, чтобы бóльшая часть кинетической энергии молота затрачивалась на необратимую деформацию поковки. Наоборот, при забивании гвоздей или свай целесообразно иметь бóльшую массу молота ($m_1 \gg m_2$), так как тогда $u \approx v_1$ и практически вся энергия удара затрачивается на преодоление сопротивления стены или грунта, а не на остаточную деформацию ударяемого тела.

Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары являются идеальными предельными случаями. При соударении реальных тел всегда имеют место и упругие, и остаточные деформации, и поэтому удар будет частично неупругим. При абсолютно упругом ударе согласно (8.5)

$$u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2), \tag{8.15}$$

т. е. относительная скорость шаров после удара равна по величине и направлена противоположно их относительной скорости до удара. При абсолютно неупругом ударе эта относительная скорость после удара равна нулю, так как $u_1 = u_2 = u$. При частично неупругом ударе относительная скорость после удара равна некоторой доле относительной скорости до удара:

$$u_1 - u_2 = -\varepsilon \cdot (v_1 - v_2), \tag{8.16}$$

где ε ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$) есть так называемый **коэффициент восстановления относительной скорости при ударе**. При ударе стальных шаров $\varepsilon = 0{,}56$, для шаров из слоновой кости $\varepsilon = 0{,}89$, для свинца ε близко к нулю.

Следующие разделы механики, с которыми нам предстоит познакомиться, основаны на применении к различным частным вопросам (вращательное движение, механика жидких и газообразных сред) рассмотренных выше общих законов механики. Поэтому раньше, чем перейти к ним, мы обсудим границы применимости этих законов.

§ 9. Границы применимости законов классической механики

Три вышеизложенных закона динамики обобщают человеческий опыт изучения движения больших — *макроскопических* («микрос» по-гречески — маленький, а «макрос» — большой) тел при не слишком больших скоростях движения. Многочисленные следствия и конкретные выводы из этих законов неизменно подтверждаются на практике (расчет движения машин, снарядов, небесных тел, обладающих скоростями в десятки километров в секунду и т. д.).

В целом механика небыстрых макроскопических движений, базирующаяся на своих законах и располагающая своими методами, имеет стройную, законченную форму и носит название *классической механики*.

Широкий охват опытного материала, отсутствие противоречий с наблюдениями привели многих исследователей XIX века к ложной мысли об абсолютной правильности и универсальности классической механики.

Однако в конце XIX и начале XX веков были обнаружены явления, которые оказалось невозможным понять в рамках законов классической механики. В связи с этим началось изучение движения и взаимодействия микроскопических частиц материи — атомов и электронов. Широкое развитие электротехники дало возможность физикам разгонять заряженные электроны в сильных электрических полях до очень больших скоростей, во много раз превысивших и скорости полета снарядов на земле, и наблюдаемые скорости движения небесных тел. Изучение строения атомов показало, что внутри последних электроны также движутся с огромными скоростями порядка десятков и сотен тысяч километров в секунду.

К началу XX века стало очевидным, что законы классической механики являются лишь приближением к действительности, не отражающим целого ряда новых, ранее неизвестных явлений. Для установления границ применимости законов классической механики рассмотрим вкратце некоторые новые факты, установленные за последние 50—60 лет.

В классической механике принималось, что *масса тела* m, характеризующая количество материи, заключенное в теле, его инерцию и тяготение, *есть неизменная величина* ($m = \text{const}$). В конце XIX века было экспериментально установлено, что масса быстро движущегося электрона m превышает массу покоящегося электрона m_0 и возрастает со скоростью движения v по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^3}}}, \qquad (9.1)$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с $= 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

Формула (9.1) оказалась справедливой не только для электрона, но и для других материальных частиц. Она дает критерий для оценки границ применимости классической механики.

Пусть v равно 300 км/с, т. е. $v/c = 0{,}001$. Тогда масса движущегося тела m будет превышать массу покоя m_0 всего на $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ m_0. При этой скорости масса 1 кг увеличится всего на 0,5 мг. Следовательно, при скоростях, малых по сравнению со скоростью света (а такими будут скорости даже в несколько сотен километров в секунду), истинная масса тела m практически не отличается от его массы покоя m_0 и может считаться постоянной. Это значит, что при таких скоростях законы классической механики остаются с высокой степенью точности справедливыми, и ими можно пользоваться для расчета движения обычных машин и механизмов, полета снарядов и движения небесных тел.

Таким образом, условие

$$\boxed{v \ll c} \tag{9.2}$$

дает количественную оценку скоростей движений, для которых еще применимы законы классической механики.

Отказ от одного из основных положений классической механики ($m = \text{const}$) привел к необходимости критического анализа и ряда других ее основ. Такой пересмотр основных представлений о пространстве и времени был произведен в 1905 г. А. Эйнштейном, создавшим новую теорию, названную им теорией относительности.

В этой теории выражение (9.1) вытекает как следствие ее основных постулатов.

Проанализируем причину возрастания массы движущегося тела. При малых скоростях движения $v \ll c$, и формулу (9.1) можно преобразовать с помощью бинома Ньютона:

$$m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \ldots\right] =$$

$$= m_0 + \frac{\frac{m_0 v^2}{2}}{c^2} + \ldots \approx m_0 + \frac{K}{c^2} \tag{9.3}$$

(члены ряда, содержащие (v/c) в четвертой и более высоких степенях, отброшены ввиду их малости).

Таким образом, увеличение массы связано с тем, что тело приобрело кинетическую энергию. *Приращение массы $m - m_0 = \Delta m$ прямо пропорционально кинетической энергии:*

$$\Delta m = \frac{K}{c^2}, \text{ или } K = c^2 \cdot \Delta m. \tag{9.4}$$

Установленная таким образом *взаимосвязь* (9.4) *между массой и энергией является совершенно универсальной*, т. е. применимой к любым массам и формам энергии — кинетической и потенциальной. Так, например, если две частицы с массами покоя $m_{1,0}$ и $m_{2,0}$ при сближении друг с другом на некоторое расстояние взаимодействуют так, что их потенциальная энергия равна U, то масса всей системы M будет равна

$$M = m_{1,0} + m_{2,0} + \frac{U}{c^2}. \qquad (9.5)$$

При взаимном отталкивании частиц $U > 0$ и добавка к массам покоя U/c^2 положительна. При взаимном протяжении частиц $U < 0$ и масса системы меньше суммы масс составляющих ее невзаимодействующих ($U = 0$) частиц.

Умножая (9.3) на c^2, получим:

$$mc^2 = m_0c^2 + K = E_0 + K = E.$$

Равенство

$$\boxed{E = mc^2} \qquad (9.6)$$

представляет собой количественную формулировку закона взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии, справедливого для любых тел. Величина

$$E_0 = m_0c^2 \qquad (9.7)$$

есть энергия, внутренне присущая частице, и называется собственной энергией, или «энергией покоя» частицы. Классическая механика эту величину E_0 не учитывала вовсе, считая, что при $v = 0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

В классической механике масса тела считалась постоянной и соотношения (4.2) и (4.4) эквивалентными друг другу. При учете зависимости (9.1) массы от скорости эта эквивалентность пропадает ($m \cdot \Delta\mathbf{v} \neq \Delta(m \cdot \mathbf{v})$). Справедливым оказывается лишь закон импульсов, и правильная запись второго закона динамики имеет вид

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t},$$

в котором его писал сам Ньютон.

Подробнее о теории относительности, ее основных положениях и выводах будет сказано в третьем томе курса (т. III, гл. VIII). Там же (т. III, гл. XIII) будут указаны границы применимости классической механики, обусловленные волновой природой элементарных частиц.

ГЛАВА III

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

§ 10. Кинематика вращательного движения

Наиболее общие случаи вращательного движения — вращение свободного тела или тела, закрепленного в одной точке, — весьма сложны и детально рассматриваются в курсах теоретической механики. Для установления основных закономерностей вращательного движения мы рассмотрим здесь простейший случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

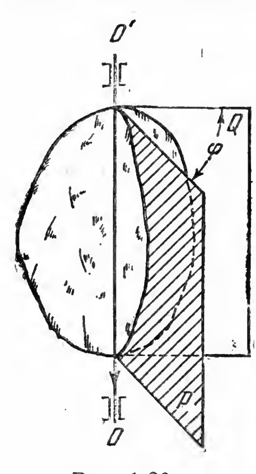


Рис. 1.26.

Назовем **абсолютно твердым телом** такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого во время движения остается неизменным. (Здесь мы опять вводим абстракцию, позволяющую отвлечься от несущественных для рассматриваемого явления деталей — малых деформаций реальных твердых тел.)

Рассмотрим абсолютно твердое тело с закрепленной осью $O'O$, изображенное на рис. 1.26. Выберем для определенности положительное направление этой оси от точки O' к точке O, т. е. вниз, как это показано на рисунке стрелкой. Проведем через эту ось две плоскости: Q и P. Неподвижная плоскость Q будет являться **телом отсчета**. Подвижная же плоскость P скреплена с телом и вращается вместе с ним. Мгновенное положение этой плоскости будет характеризоваться величиной двугранного угла φ, который она составляет с неподвижной плоскостью Q. Задание одного числа — **угла поворота** φ в этом случае целиком определяет расположение (ориентацию) тела; тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет лишь **одну степень свободы**.

Условимся при этом угол φ считать положительным, если вращение происходит по направлению правого винта относительно оси $O'O$. Иными словами, при наблюдении вдоль оси сверху угол φ отсчитывается по часовой стрелке. При вращении на несколько оборотов угол φ окажется кратным 2π. При вращении в обратном направлении угол φ будет отрицательным.

Изменение угла поворота со временем

$$\varphi = \varphi(t) \tag{10.1}$$

зависит от характера вращательного движения тела; (10.1) называется *уравнением вращательного движения тела*.

При вращении всего твердого тела в целом отдельные его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Действительно, рассмотрим произвольную точку M (рис. 1.27), находящуюся на расстоянии r от оси вращения. Для абсолютно твердого тела это расстояние будет оставаться неизменным во все время движения и точка M будет двигаться по окружности постоянного радиуса

$$r = \text{const} \tag{10.2}$$

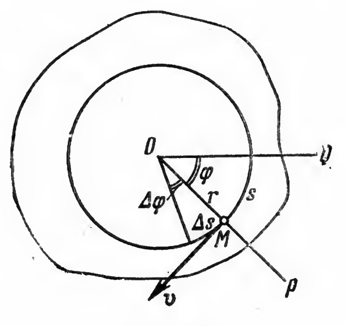


Рис. 1.27.

с центром на оси вращения $O'O$. Для разных точек вращающегося тела величина r может быть различной.

Кинематические характеристики различных движущихся точек (путь, скорость, ускорение) связаны друг с другом и с кинематическими характеристиками движения всего тела в целом. Рассмотрим произвольную точку M, лежащую в подвижной плоскости P. Угол поворота всего тела φ и путь s, пройденный точкой M, будем отсчитывать от неподвижной плоскости Q, как указывалось выше, по часовой стрелке (рис. 127). Если φ измерять в радианах, то s и φ связаны известным равенством

$$s = r \cdot \varphi. \tag{10.3}$$

За промежуток времени Δt тело повернется на угол $\Delta\varphi$ и точка M пройдет путь

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi. \tag{10.4}$$

Разделив обе части равенства (10.4) на Δt и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{10.5}$$

Величина $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ представляет согласно (2.3) абсолютную величину линейной скорости движения точки M. По аналогии с этим величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{10.6}$$

характеризующая быстроту изменения угла поворота, называется угловой скоростью вращения тела. Угловая скорость измеряется в радианах в секунду, а в технике — в оборотах в минуту:

$$1 \text{ об/мин} = \frac{2\pi \text{ рад}}{60 \text{ с}} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Из (10.5) и (10.6) следует, что

$$v = r \cdot \omega. \tag{10.7}$$

При неравномерном вращении величина ω меняется со временем и за промежуток времени Δt получает приращение $\Delta\omega$, при этом линейная скорость произвольной точки M также получает численное приращение Δv, равное

$$\Delta v = \Delta (r \cdot \omega) = r \cdot \Delta\omega \tag{10.8}$$

(так как r для любой фиксированной точки есть величина постоянная). Разделив обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{10.9}$$

Согласно (2.11) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = w_{\text{к}}$ называется касательным, или линейным ускорением движущейся точки.

По аналогии с этим величина

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \tag{10.10}$$

характеризующая быстроту изменения во времени угловой скорости, называется угловым ускорением всего вращающегося тела. В системах единиц СГС и СИ угловое ускорение измеряется в рад/с^2. Из уравнений (10.9) и (10.10) следует, что

$$w_{\text{к}} = r \cdot \varepsilon. \tag{10.11}$$

Равенства (10.3), (10.7) и (10.11) показывают, что линейные величины (s, v, $w_{\text{к}}$), характеризующие движение отдельной точки M, получаются из соответственных угловых величин (φ, ω, ε), характеризующих движение всего тела как целого, простым умножением на радиус вращения r.

При вращательном движении точки М ее скорость **v** *направлена по касательной к траектории и непрерывно меняет свое направление.* Быстрота изменения направления скорости характеризуется нормальным ускорением $\mathbf{w}_н$. Согласно (2.17)

$$w_н = \frac{v^2}{r}, \qquad (10.12)$$

так как радиус кривизны траектории точки M остается постоянным ($R = r$).

На первый взгляд нормальное ускорение точек твердого тела убывает обратно пропорционально расстоянию до оси вращения. Однако не надо забывать, что по мере удаления от оси v также возрастает. Подставляя (10.7) в (10.12), получим:

$$w_н = \omega^2 \cdot r. \qquad (10.13)$$

Так как ω одинакова для всех точек тела, то, следовательно, центростремительное ускорение растет с удалением от оси. Чтобы заставить вращаться с той же самой угловой скоростью более удаленные от оси точки маховика, необходимо сообщить им большее центростремительное ускорение и приложить для этого бóльшую центростремительную силу. По третьему закону динамики эти точки будут действовать на удерживающие их связи (спицы маховика) с такой же по величине центробежной силой, величина которой, как следует из (10.13), прямо пропорциональна радиусу вращения и квадрату угловой скорости.

Согласно (2.18) и (2.19) вектор полного ускорения точки M равен

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_к + \mathbf{w}_н, \qquad (10.14)$$

а его величина

$$w = \sqrt{w_к^2 + w_н^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (10.15)$$

При равномерном вращении твердого тела

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = \text{const} \quad и \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t. \qquad (10.16)$$

При равноускоренном вращении

$$\varepsilon = \text{const}, \ \omega = \omega_0 + \varepsilon t \ и \ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (10.17)$$

§ 11. Динамика вращения

Чтобы твердое тело с закрепленной осью привести во вращательное движение, необходимо хотя бы в одной из его точек приложить внешнюю силу **F**, не проходящую через ось вращения и не параллельную ей. Рассмотрим простейший случай, когда сила **F** лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. При этом

вращательное действие силы **F** определяется не только величиной силы F, но и расстоянием ее линии действия от оси вращения, так называемым плечом p. По известному правилу рычага действие силы **F** можно уравновесить действием силы **F**′, вращающей тело в противоположном направлении (рис. 1.28), если выполнено условие

$$F \cdot p = F' \cdot p'. \tag{11.1}$$

Произведение величины силы на плечо

$$M = F \cdot p = F \cdot r \cdot \sin\alpha = r \cdot F \cdot \sin\left(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{F}}\right) = r \cdot F_{\text{к}} \tag{11.2}$$

носит название вращательного момента, или момента силы относительно оси вращения. Здесь, как видно из чертежа, r есть расстояние от точки приложения силы до оси вращения, а $F_{\text{к}} = F \cdot \sin\,(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{F}})$ — проекция силы на направление касательной к траектории движения точки ее приложения.

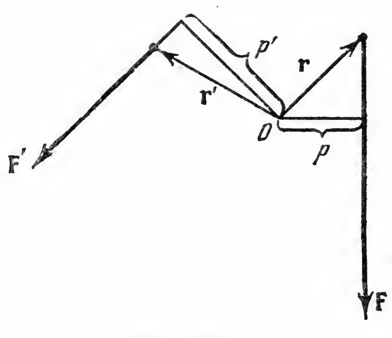


Рис. 1.28.

Угол $\alpha = (\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{F}})$ и момент силы имеют знак. Если сила вращает тело по часовой стрелке (правый винт по отношению к оси $O'O$), то мы будем считать ее момент положительным, если же она вращает тело против часовой стрелки — отрицательным *).

В частном случае, когда $\alpha = 0$, линия действия силы пересекает ось и $M = 0$. Такая сила будет уравновешиваться реакциями подшипников (см. рис. 1.26) и не вызовет вращения.

Для сил **F** и **F**′, изображенных на рис. 1.28, моменты относительно оси соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} M &= F \cdot p, \\ M' &= -F' \cdot p'. \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

Тогда условие равновесия (11.1) принимает вид

$$M + M' = F \cdot p - F' \cdot p' = 0. \tag{11.4}$$

Иными словами, действующие на тело *силы* **F** и **F**′ *не вызывают вращения, если их моменты* M и M' *взаимно уравновешиваются,* т. е. равны по величине и обратны по знаку.

---

*) Момент силы есть вектор. Рассматриваемый нами здесь момент силы относительно оси есть проекция этого вектора на ось вращения.

Если на тело, закрепленное на оси, действует несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$, то суммарное их действие будет эквивалентно действию одного момента M, равного алгебраической сумме моментов всех действующих сил:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot F_i \cdot \sin\alpha_i. \tag{11.5}$$

Перейдем теперь к выводу уравнения движения тела, имеющего закрепленную в пространстве ось вращения. Для этого мысленно разобьем тело на совокупность отдельных точек с массами m_1, m_2, ..., m_i, ... Каждая из этих точек находится на расстоянии от оси вращения, равном соответственно r_1, r_2, ..., r_i, ... На точку с индексом i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) действует в данный момент некоторая сила $\mathbf{F}_i$, которая представляет собой равнодействующую всех приложенных к этой точке внешних и внутренних сил,

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{внешн}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{внутр}}. \tag{11.6}$$

Внешние силы обычно приложены лишь в некоторых определенных точках тела, и для всех остальных точек $\mathbf{F}_i^{\text{внешн}} = 0$. Внутренние же силы взаимодействия, удерживающие точки твердого тела на определенных расстояниях друг от друга, приложены к каждой точке вращающегося тела.

По второму закону динамики ускорение данной точки связано с силой соотношением

$$\boldsymbol{F}_i = m_i \mathbf{w}_i. \tag{11.7}$$

Точка тела с массой m_i движется по окружности радиуса r_i. Спроецируем векторы $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{w}_i$ (11.7) на направление касательной к траектории точки. Тогда, учитывая (10.11), найдем:

$$F_{i,\,\text{к}} = m_i w_{i,\,\text{к}} = m_i r_i \varepsilon. \tag{11.8}$$

Умножив обе части этого равенства на r_i и подставив в (11.2), получим:

$$M_i = m_i r_i^2 \varepsilon, \tag{11.9}$$

где M_i есть момент действующей на данную точку тела силы $\mathbf{F}_i$ относительно оси вращения. Поскольку согласно (11.6) сила $\mathbf{F}_i$ есть геометрическая сумма двух сил, то по правилам векторного исчисления ее момент равен алгебраической сумме моментов внешней и внутренней сил, действующих на i-ю точку,

$$M_i = M_i^{\text{внешн}} + M_i^{\text{внутр}}. \tag{11.10}$$

Тогда

$$M_i^{\text{внешн}} + M_i^{\text{внутр}} = m_i r_i^2 \varepsilon. \tag{11.11}$$

Уравнения (11.11) справедливы для каждой точки тела. Просуммируем эти уравнения для всех точек вращающегося тела:

$$\sum_i M_i^{\text{внешн}} + \sum_i M_i^{\text{внутр}} = \varepsilon \cdot \sum_i m_i r_i^2. \qquad (11.12)$$

По третьему закону динамики каждой внутренней силе в системе всегда соответствует сила, равная ей по величине и обратно направленная по той же прямой. Моменты этих сил попарно равны по величине и обратны по знаку. Поэтому очевидно, что алгебраическая сумма моментов всех неизвестных нам внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i M_i^{\text{внутр}} = 0. \qquad (11.13)$$

Алгебраическую сумму моментов всех внешних сил, действующих на тело, назовем полным моментом внешних сил и обозначим

$$M^{\text{внешн}} = \sum_i M_i^{\text{внешн}}. \qquad (11.14)$$

В правую часть уравнения (11.12) входит сумма

$$\sum_i m_i r_i^2 = I, \qquad (11.15)$$

которая носит название момента инерции тела относительно заданной оси вращения. *Момент инерции тела I численно равен сумме произведений масс всех его точек на квадраты их расстояний до оси вращения.* Величина этого момента инерции зависит не только от массы всего тела и ее распределения в теле, но также от ориентации тела относительно оси вращения.

При введенных обозначениях уравнение (11.12) принимает вид

$$M^{\text{внешн}} = I \cdot \varepsilon. \qquad (11.16)$$

Уравнение (11.16) позволяет найти угловое ускорение вращающегося тела ε по известному моменту внешних сил и выражает второй закон динамики для вращательного движения. Это уравнение аналогично второму закону динамики (3.7) для поступательного движения:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w}.$$

Сопоставляя (11.16) и (3.7), мы видим, что при вращательном движении роль силы играет момент силы M, роль ускорения играет угловое ускорение ε, а роль массы играет момент инерции I. Последний характеризует инерцию тела при вращательном движении: чем больше I, тем меньшее угловое ускорение ε получит тело под действием данного момента внешних сил $M^{\text{внешн}}$.

Если рассматриваемое тело представляет собой обруч массы m, толщина которого мала по сравнению с радиусом R, то момент его инерции относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной к плоскости обруча, равен

$$I_{\text{обр}} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R^2 = R^2 \cdot \sum_i m_i = mR^2.$$

Для тел более сложной формы суммирование выражения (11.15) производится методами интегрального исчисления. Так, например, для сплошного диска или сплошного цилиндра момент инерции относительно оси цилиндра равен

$$I_{\text{цил}} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Момент инерции тонкого цилиндра (стержня) высотой h относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к стержню, равен

$$I_{\text{ст}} = \frac{1}{12} mh^2.$$

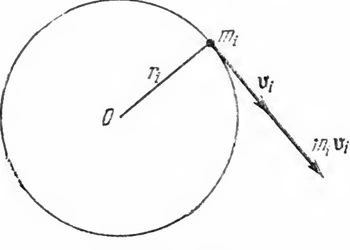


Рис. 1.29.

Для решения практических задач динамики вращательного движения можно получить ряд важных следствий из основного уравнения (11.16). Используя определение (10.10), перепишем (11.16) в виде

$$M^{\text{внешн}} = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{11.17}$$

где $M^{\text{внешн}}$ — среднее значение момента внешних сил за бесконечно малый промежуток времени Δt. Умножим обе части равенства на Δt. Тогда

$$M^{\text{внешн}} \cdot \Delta t = I\Delta\omega = I\omega_2 - I\omega_1,$$

или

$$M^{\text{внешн}} \cdot \Delta t = \Delta(I\omega). \tag{11.18}$$

Для выяснения физического смысла величины $I\omega$ вернемся к рассмотрению движения отдельных точек вращающегося тела. Каждая из этих точек с массой m_i движется по окружности постоянного радиуса r_i (рис. 1.29). Ее скорость в данный момент времени $\mathbf{v}_i$ и вектор количества движения $m_i\mathbf{v}_i$ перпендикулярны к этому радиусу. Таким образом, радиус r_i является плечом по отношению к $m\mathbf{v}_i$, и мы можем (аналогично моменту силы) ввести понятие **момента количества движения точки**

$$L_i = m_i v_i r_i \tag{11.19}$$

как произведения величины вектора количества движения на его плечо относительно оси вращения.

Алгебраическая сумма моментов количества движения всех точек вращающегося твердого тела носит название момента количества движения тела относительно оси:

$$L = \sum_i L_i. \tag{11.20}$$

Подставляя в (11.20) выражение для L_i из (11.19) и используя (10.7), получаем, что

$$L = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_i m_i r_i^2 = I\omega, \tag{11.21}$$

т. е. величина $I\omega$ есть момент количества движения вращающегося тела. Стоящее в левой части равенства (11.18) произведение момента сил на время его действия называется импульсом момента внешних сил. Уравнение (11.18) выражает так называемый закон момента количества движения: *Импульс момента внешних сил, действующих на вращающееся тело, равен изменению его момента количества движения.*

Если внешние силы отсутствуют (замкнутая система) или таковы, что их суммарный момент равен нулю ($M^{\text{внешн}} = 0$), то (11.18) принимает вид так называемого закона сохранения момента количества движения

$$I\omega = \text{const}. \tag{11.22}$$

Например, Земля вращается вокруг своей оси, совершая один оборот за 24 часа. На Землю действует внешняя сила — суммарная сила притяжения отдельных ее точек к Солнцу. Эта результирующая сила приложена к центру Земли и проходит через ось вращения. Плечо и момент этой силы, следовательно, равны нулю.

Поэтому момент количества движения Земли остается постоянным. Если бы момент инерции Земли не менялся (I = const), то отсюда следовало бы постоянство угловой скорости вращения Земли (ω = const) и продолжительности суток. Практически вследствие непрерывного падения на Землю метеоритов масса и момент инерции Земли медленно возрастают и угловая скорость ее, в силу указанной и других причин, уменьшается так, что продолжительность суток возрастает примерно на 0,57 с за столетие. Поэтому в системе СИ единица времени — секунда определяется из продолжительности более устойчивого процесса — обращения Земли вокруг Солнца.

Закон сохранения момента количества движения используется цирковыми артистами. Например, акробат, переворачиваясь, на-

клоняется и сгибает колени. При этом момент его инерции убывает, а угловая скорость вращения соответственно увеличивается.

В демонстрационном опыте на лекциях по физике экспериментатор становится на горизонтальную «скамью Жуковского», которая может вращаться относительно вертикальной оси с малым трением. Он берет велосипедное колесо, быстро вращающееся вокруг вертикальной оси, например, по часовой стрелке (рис. 1.30, *а*). Если он резко переворачивает колесо, как это изображено на рис. 1.30, *б*, то знак момента количества движения колеса $I_к\omega_к$ изменяется на обратный ($-I_к\omega_к$). Поскольку поворот колеса совершается под действием внутренних сил, то полный момент количества движения системы должен по (11.22) оставаться постоянным. Действие закона сохранения момента количества движения проявляется в том, что вся система (человек — скамья) начинает вращаться в ту же сторону, в которую первоначально вращалось колесо.

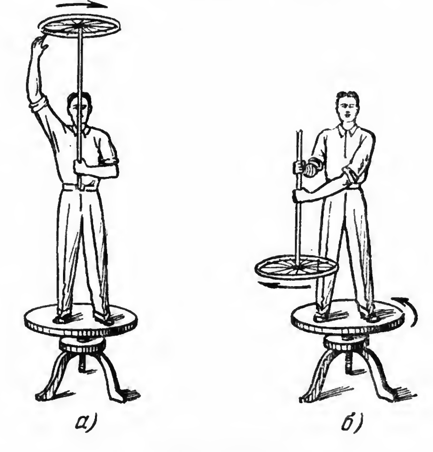


Рис. 1.30.

Закон сохранения момента количества движения выполняется и в более сложном случае тела с незакрепленной осью. Если твердое тело вращается с большим моментом количества движения относительно оси, совпадающей с осью геометрической симметрии тела, то для заметного изменения ориентации оси вращения в пространстве оказывается необходимым прикладывать очень большие внешние силы.

Это свойство вращательного движения широко применяется в различных волчках, от маленькой игрушечной юлы до больших современных г и р о с к о п о в, ослабляющих качку корабля.

Кинетическая энергия вращающегося тела представляет собой алгебраическую сумму кинетических энергий отдельных его точек, т. е.

$$E_{кин} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (11.23)$$

Работа внешней силы при вращении

$$\Delta A = F_{i,\,к}\,\Delta s = F_{i,\,к} r_i\,\Delta\varphi = M_i\,\Delta\varphi, \qquad (11.24)$$

т. е. *равна произведению момента силы на угол поворота тела.* Эта работа затрачивается на увеличение кинетической энергии

вращающегося тела

$$\Delta A = \frac{I\omega_{\text{кон}}^2}{2} - \frac{I\omega_{\text{нач}}^2}{2}. \qquad (11.25)$$

В случае, если тело движется поступательно со скоростью v и одновременно вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, то полная кинетическая энергия его движения равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (11.26)$$

Из рассмотрения (11.26) мы еще раз убеждаемся, что момент инерции при вращательном движении играет такую же роль, как масса материальной точки при поступательном ее движении.

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ
(элементы гидро- и аэродинамики)

§ 12. Уравнение Д. Бернулли

Рассмотрим применение основных законов динамики к простейшим случаям движения жидкости. Под понятием ж и д к о с т ь в настоящем параграфе мы будем объединять и собственно жидкости (воду, спирт, ртуть и другие тела в жидком агрегатном состоянии), и газы. Общим для обоих случаев является то, что в отличие от твердого тела отдельные частицы жидкости могут перемещаться друг относительно друга, и жидкость, помещенная в какой-либо сосуд, заполняет его и принимает форму сосуда.

Ограничимся простейшим случаем движения жидкости, когда выполняются следующие три условия.

1. Ж и д к о с т ь н е с ж и м а е м а, т. е. плотность ρ (кг/м^3) отдельных движущихся элементов объема жидкости остается во все время движения постоянной.

Для жидкостей подобное приближение вполне естественно, так как их сжимаемость очень невелика. Например, для увеличения плотности жидкой воды, находящейся при комнатной температуре, на 1% необходимо приложить давление около 200 атм.*) При таком давлении струя воды, вылетающая из резервуара в атмосферу, будет иметь начальную скорость порядка 200 м/с.

В противоположность жидкостям газы сжимаются легко, и их плотность прямо пропорциональна давлению. Благодаря малому значению плотности для приведения газа в движение достаточно очень малого изменения давления, а следовательно, и плотности газа. Например, чтобы воздух проходил через вентилятор со скоростью 10 м/с, достаточно создать разрежение порядка 1 мм рт. ст., т. е. почти 10^{-3} атм. Следовательно, и плотность воздуха при таких скоростях изменится всего лишь на 10^{-3} своей величины, т. е. на 0,1%.

---

*) 1 атм $\approx 10^5$ Н/м^2.

Теория и опыт показывают, что сжимаемостью жидкости или газа можно пренебрегать и с достаточной степенью точности пользоваться понятием несжимаемой жидкости при условии, что скорости их движения малы по сравнению со скоростью распространения звука. Скорость звука в воздухе $v_{зв} = 333$ м/с ≈ 1200 км/ч. Поэтому обычно при изучении сопротивления воздуха движению тел (автомобиля, поезда или легкого самолета, движущегося со скоростью 200 км/ч) можно считать воздух практически несжимаемым. Однако для современных реактивных самолетов, скорости которых достигают и превышают скорость звука, пренебрегать сжимаемостью воздуха уже нельзя.

Таким образом, мы приходим к выводу, что понятие «несжимаемости» характеризует не столько свойства самой жидкости при отсутствии движения, сколько свойства данного движения. И жидкости, и газы при движении практически несжимаемы, когда

$$v_{движ} \ll v_{зв}. \tag{12.1}$$

2. Жидкость идеальна, т. е. отдельные элементы жидкости движутся друг относительно друга без трения. Справедливость подобного пренебрежения трением также зависит от характера изучаемого движения. При движении реальной жидкости или газа внутри нее всегда возникают силы вязкости. Мы будем называть жидкость идеальной тогда, когда во время ее движения можно пренебречь силами внутреннего трения по сравнению с другими силами, действующими в жидкости (силами тяжести, давления и т. п.). В этих случаях потери энергии движения на трение и переход в тепло незначительны и можно применять закон сохранения энергии в чисто механической форме (6.11).

3. Движение жидкости установившееся. Если внешние силы, вызывающие движение жидкости, не зависят от времени, то через некоторое время после начала движения в жидкости установится вполне определенное распределение скоростей. При этом скорость движения каждой частицы жидкости может изменяться от точки к точке вдоль ее траектории. Однако в каждой данной точке пространства скорости движения всех последовательно проходящих через нее частиц жидкости будут одинаковыми. Такое движение жидкости в данной ограниченной части пространства и называется установившимся.

В 1738 г. Д. Бернулли вывел очень важное соотношение для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости, носящее название уравнения Бернулли.

Для вывода этого уравнения рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе переменного сечения (рис. 1.31). Жидкость втекает слева в сечение *1* площадью S_1, находящееся на высоте z_1 над уровнем земли. Скорость втекающих частиц жидкости перпендикулярна

к сечению трубы и равна v_1, давление в жидкости при входе в трубу равно p_1.

Через сечение *2* площадью S_2, находящееся на высоте z_2 над уровнем земли, жидкость вытекает из трубы со скоростью v_2; давление в жидкости на выходе из трубы равно p_2. Жидкость течет через трубу под действием разности приложенных извне давлений $p_1 - p_2$ или разности уровней $z_1 - z_2$, приводящей к гидростатическому давлению соответствующего столба жидкости, или того и другого вместе.

За бесконечно малый промежуток времени Δt через сечение *1* втекает масса жидкости Δm, заполняющая цилиндрик с площадью основания S_1 и высотой $v_1 \Delta t$ (заштрихованный на рис. 1.31). За тот же промежуток времени через сечение *2* вытечет *такая же масса жидкости* Δm, заполнявшая цилиндрик с площадью основания S_2 и высотой $v_2 \Delta t$ (также заштрихованный на рис. 1.31). Значение Δm можно найти, умножив величину каждого из этих элементарных объемов на плотность жидкости ρ. Тогда получим:

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t. \tag{12.2}$$

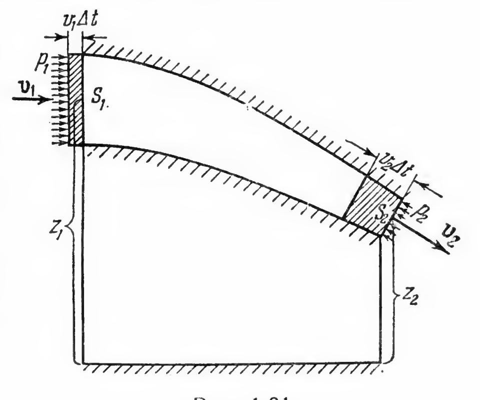


Рис. 1.31.

Сокращая обе части уравнения (12.2) на $\rho \Delta t$, мы получаем, что для несжимаемой жидкости на основании закона сохранения вещества всегда выполняется простое соотношение между величиной сечения и скоростью течения жидкости:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad \text{или} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \tag{12.3}$$

Иначе говоря, *объемы втекающей и вытекающей за единицу времени жидкости равны.*

При перемещении массы жидкости Δm по трубе силы внешнего давления совершают работу. Полная сила давления, действующая на левое сечение, равна $p_1 S_1$. Эта сила переместила массу жидкости Δm на расстояние $v_1 \Delta t$. За то же время в правом сечении такая же масса жидкости Δm переместилась на расстояние $v_2 \Delta t$ и совершила работу против силы давления $p_2 S_2$.

Полная работа ΔA сил давления при таком перемещении равна

$$\Delta A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Эта работа затрачена на увеличение кинетической энергии элемента жидкости с массой Δm, скорость которого изменилась от v_1 на входе до v_2 на выходе, и на изменение потенциальной энергии этого элемента в поле тяжести при переходе с уровня z_1 на уровень z_2. Следовательно,

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot g z_2 - \Delta m \cdot g z_1. \quad (12.4)$$

Разделим обе части равенства на объем $\Delta V = S_1 v_1 \Delta t$. Тогда, имея в виду, что согласно (12.2)

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{S_1 v_1 \Delta t} \quad \text{и} \quad \frac{S_2 v_2 \Delta t}{S_1 v_1 \Delta t} = 1,$$

получим:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_2 - \rho g z_1. \quad (12.5)$$

Перенесем здесь все члены уравнения, соответствующие жидкости в сечении *1*, в левую часть, а соответствующие жидкости в сечении *2* — в правую часть. Тогда

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2. \quad (12.6)$$

Поскольку сечения *1* и *2* могут быть выбраны произвольно, то, следовательно, сумма $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z$ остается неизменной в любом сечении трубы и

$$\boxed{p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = \text{const.}} \quad (12.7)$$

Уравнение (12.7) называется уравнением Бернулли и выражает *закон сохранения энергии при установившемся движении несжимаемой идеальной жидкости*. Это уравнение справедливо для любого движущегося объема жидкости вдоль траектории его движения, называемой линией тока.

Величина $^1/_2 \rho v^2$ представляет собой удельную кинетическую энергию, т. е. кинетическую энергию единицы объема движущейся жидкости (Дж/м^3). Величина $\rho g z$ есть удельная потенциальная энергия в поле тяжести. Соответственно этому имеющая ту же размерность величина p (Н/м^2 = Дж/м^3) представляет собой удельную потенциальную энергию сил давления в жидкости.

При движении элементарного объема жидкости происходит непрерывный переход его энергии из одной формы в другую, но полная энергия этого объема остается неизменной.

Так как все члены уравнения (12.7) имеют размерность давления, то это уравнение часто формулируют иначе. Давление p называют

статическим напором, величину ρgz — *гидравлическим напором*, а величину $^1/_2\rho v^2$ — *скоростным* или *динамическим, напором*. Тогда из (12.7) следует, что *полный напор в движущейся жидкости*, складывающийся из статического, гидравлического и скоростного напоров, *остается постоянным*. Приведем для пояснения два примера.

На рис. 1.32 изображена схема водоструйного насоса. Поток воды из водопровода течет по трубке с местным сужением. В узком сечении скорость жидкости резко возрастает и увеличивается скоростной напор $^1/_2\rho v_2^2$. При этом по уравнению Бернулли в суженном сечении падает статический напор и давление p_2 становится ниже атмосферного. Поэтому через отводную трубку в это сечение засасывается воздух из откачиваемого сосуда A. Пройдя суженное

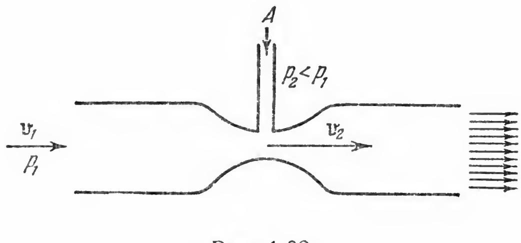


Рис. 1.32.

сечение, струя воды с воздухом вновь расширяется, ее скорость падает, а давление возрастает до атмосферного на выходе из насоса. Такой насос очень прост по конструкции и может создавать значительное разрежение, понижая давление в откачиваемом сосуде до $\sim 10^{-3}$ атм.

Работами Д. Бернулли и его современника Эйлера были заложены основы науки о движении жидкостей, выросшей в настоящее время в самостоятельную науку — гидродинамику. Широкое практическое применение гидродинамика получила в конце XIX и начале XX веков в результате работ Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.

Жуковским и Чаплыгиным была создана также новая наука — аэродинамика — учение о законах движения газов и теория полета. В. И. Ленин называл Н. Е. Жуковского отцом русской авиации. Жуковскому первому удалось объяснить механизм подъемной силы, создаваемой крылом аэроплана при движении. На рис. 1.33 изображен разрез примерного профиля крыла. Пунктиром показаны линии тока встречного течения воздуха. Как видно из рисунка, над верхней частью крыла происходит сгущение этих линий и увеличение относительной скорости воздушного потока. Согласно уравнению Бернулли давление в потоке над крылом станет меньше, чем под крылом, и за счет этой разности давлений

возникает подъемная сила **F**, удерживающая летящий самолет в воздухе.

На основе этой качественной картины Н. Е. Жуковский разработал количественные методы расчета величины подъемной силы для различных профилей крыла. Созданные им профили, ныне называемые *профилями Жуковского*, позволили проецировать крылья наивыгоднейшей формы.

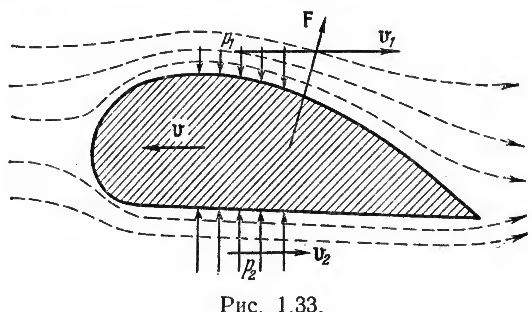


Рис. 1.33.

Как уже указывалось выше, при скоростях полета современных скоростных самолетов воздух уже нельзя считать несжимаемой жидкостью. Методы учета сжимаемости воздуха были разработаны С. А. Чаплыгиным еще в 1903 г., когда скорости полета не превышали 30—40 км/ч. На основе этих методов рассчитываются подъемная сила и сопротивление крыльев при современных скоростях полета.

ЧАСТЬ II
ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

ГЛАВА V
ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

§ 13. Введение. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории

Многие твердые и жидкие тела, такие, например, как стекло, вода, представляются нам совершенно однородными. Они непроницаемы, почти несжимаемы. Отсутствие видимых неоднородностей, пор между частицами вещества приводит к обманчивому представлению о том, что эти, а может быть, и все твердые и жидкие тела, сплошь заполняют занимаемую ими часть пространства, что их вещество распределено в этом пространстве непрерывно.

Газы в этом смысле заведомо отличаются от твердых тел. Они могут сжиматься и способны заполнять любой предоставленный для них объем. Это обстоятельство заставляет думать, что газы состоят из малых обособленных друг от друга частиц. В то же время переходы тел из одного агрегатного состояния в другое, например испарение воды, приводят к распространению подобных представлений и на жидкие и твердые тела.

Еще задолго до нашей эры, в период расцвета древних культур возникло учение о мельчайших частицах, из которых построено любое вещество.

Одна из древнеиндийских философских школ учила, что вечные части вселенной состоят из четырех элементов: воды, земли, огня и воздуха. Частички этих элементов вечны и несотворимы, они непротяженны, и в то же время их разнородная природа составляет причину протяженности возникающих соединений этих частичек.

Древнегреческие философы Анаксагор и Демокрит считали, что любое вещество состоит из мельчайших неделимых частиц — атомов (атом — греческое слово, означающее «неделимый»). Разнообразие веществ, имеющихся в природе, объясняется не разнообразием различных сортов атомов, но разнообразием различных соединений этих атомов (теперь мы называем такие соединения

молекулами). Атомы невидимы и необнаружимы в отдельности только вследствие своей чрезвычайной малости. Именно в силу этого огромная совокупность атомов, образующая твердое или жидкое тело, внушает нам представление о непрерывности этих тел. Атомы находятся в непрерывном движении, соединения их могут распадаться, превращаясь в другие соединения, что и объясняет наблюдаемые нами превращения веществ (теперь мы называем такие перестройки молекул химическими превращениями вещества).

Существенный прогресс атомистической теории в XVIII веке обязан М. В. Ломоносову. Особой его заслугой является то, что он включает в круг вопросов, находящих свое объяснение в атомной теории, совершенно, казалось бы, чуждые ей вопросы. Так, Ломоносов объясняет тепловые явления как результат движения мельчайших частиц вещества, отрицая наличие каких-то специфических невесомых тепловых материй, привлекавшихся затем еще в течение века для объяснения тепловых явлений.

Настоящая часть курса посвящена молекулярной физике и основам теории теплоты — термодинамике. *Молекулярная физика изучает те свойства вещества, которые обусловлены его молекулярным строением.* В ней рассматриваются превращения вещества, связанные с изменением энергии его молекул, изменения агрегатного состояния тел и т. д.

При этом мы исключаем из рассмотрения те явления, которые связаны с изменением состава, перестройкой молекул, что является в значительной степени областью химии.

Выделенный таким образом круг вопросов охватывается единым методом рассмотрения, единой теорией, носящей название молекулярно-кинетической теории вещества. Тепловые явления, в соответствии с идеями Ломоносова, будут трактоваться также с точки зрения молекулярно-кинетической теории вещества.

Перечислим коротко те явления, которые подтверждают правильность исходных идей молекулярно-кинетической теории.

1. Высокая сжимаемость газов свидетельствует о наличии больших расстояний между молекулами газа.

2. Стремление газа занять любой, сколь угодно большой, предоставленный в его распоряжение объем свидетельствует о том, что молекулы газа движутся независимо друг от друга.

3. Взаимное проникновение соприкасающихся газов — диффузия газов — показывает, что молекулы одного газа движутся в «пустотах» между молекулами второго газа.

4. Смешение жидкостей, растворение твердых тел в жидкостях также объясняются перемешиванием молекул разных сортов. При этом существенно, что объем смеси может отличаться от суммы объемов несмешанных веществ, что свидетельствует о различной компактности молекулярных систем. Так, при смешении 100 см^3

воды и 100 см^3 спирта получается не 200, но 196 см^3 смеси: в смеси молекулы распределились компактнее, чем раньше. К этому же кругу вопросов относятся и явления испарения жидких и твердых тел.

5. Давление газа на стенки сосуда, в котором он заключен (или на поверхность тела, введенного в газ), объясняется ударами молекул газа. Повышение давления при увеличении плотности газа (при его сжатии) объясняется увеличением относительного числа молекул, бомбардирующих поверхности, ограничивающие газ. Точно так же увеличение давления с повышением температуры объясняется увеличением скорости молекул, что приводит к учащению их столкновений со стенками сосуда и к увеличению «силы» удара.

6. Прихотливое движение мельчайших твердых частиц, взвешенных в жидкости или газе, — *броуновское движение* — объясняется неуравновешенностью ударов, испытываемых броуновской частицей со стороны молекул жидкости (газа). В силу малости размеров и масс молекул их толчки могут привести в движение лишь очень легкие, броуновские, частицы.

Однако все эти качественные соображения не дают еще возможности судить о том, одинаковы ли молекулы вещества по массам и другим свойствам или же они представляют собой «осколки» веществ произвольных размеров. Ответ на этот вопрос был получен впервые с помощью химических исследований.

7. Напомним известный из школьного курса химии закон кратных отношений Дальтона. Согласно этому закону при соединении различных элементов количества соединяющихся веществ не произвольны, но могут находиться лишь в простых отношениях. Так, например, если соединять кислород и азот, то могут образоваться соединения, содержащие на 7 весовых частей азота (N) разные, но находящиеся с ними в простых отношениях количества кислорода (O):

1) 7 г N + 1 × 4 г O → 11 г закиси азота,
2) 7 г N + 2 × 4 г O → 15 г окиси азота,
3) 7 г N + 3 × 4 г O → 19 г ангидрида азотистой кислоты,
4) 7 г N + 4 × 4 г O → 23 г двуокиси азота,
5) 7 г N + 5 × 4 г O → 27 г ангидрида азотной кислоты.

Закон кратных отношений легко объяснить, если предположить, что мельчайшие частицы химически простых веществ — атомы — одинаковы по массе и свойствам (в томе III курса мы увидим, что вывод о тождественности массы атомов данного элемента нуждается в некоторых ограничениях, однако пока что мы не будем учитывать этого).

8. Опыт показывает, что в равных объемах газа при одинаковых давлениях и температурах находится одинаковое число молекул.

Действительно, можно убедиться, что литр кислорода при соединении с углеродом дает литр углекислого газа (*при том же давлении и температуре*). При горении углерода на образование каждой молекулы CO_2 идет одна молекула кислорода — O_2, следовательно, молекул CO_2 образуется столько же, сколько было молекул O_2. Так как в результате соединения кислорода с углеродом число молекул газа не меняется, сохраняется и объем газа. Многочисленные опыты подобного рода позволили Авогадро сформулировать закон, носящий его имя:

В равных объемах газа, при равных температурах и давлениях содержится равное число молекул газа.

В 1738 г. Д. Бернулли, исходя из молекулярно-кинетических представлений, дал простой качественный вывод закона Бойля — Мариотта. Однако настоящая количественная разработка молекулярно-кинетической теории началась лишь спустя 100 лет, когда представления об атомах и молекулах получили подтверждение в перечисленных выше химических закономерностях. Работами Р. Клаузиуса, Д. Максвелла, Л. Больцмана, Д. Гиббса и других ученых во второй половине XIX века был создан изящный математический аппарат так называемой статистической физики, позволивший теоретически вывести многие известные количественные закономерности и связать друг с другом разнородные на первый взгляд физические явления.

И все же, несмотря на большие успехи молекулярно-кинетической теории, ей приходилось базироваться лишь на ряде перечисленных выше косвенных доказательств ее основных положений. Отсутствие прямых опытных доказательств существования атомов и молекул позволило представителям идеалистической школы Маха и Оствальда в физике длительное время бороться против материалистических идей молекулярно-кинетической теории. Утверждая реальность только наших ощущений, а не окружающего нас мира, Мах и Оствальд отрицали также существование атомов и молекул, как недоступных, по их мнению, прямому наблюдению. Эти идеалистические воззрения нанесли в свое время большой вред развитию физики.

Прошло, однако, совсем немного времени, и в самом начале XX века рядом блестящих экспериментов было наглядно доказано реальное существование атомов и молекул. Эти эксперименты были поставлены в связи с замечательными теоретическими работами Эйнштейна и Смолуховского.

В результате этих работ атомистическая гипотеза утвердилась в виде общепризнанной теории. Они явились первым этапом блестящего развития физики первой половины нашего века.

В 1909 г. Перрен измерил число Авогадро, т. е. число молекул в одном моле. Таким образом удалось «пересчитать» молекулы и определить их массу. Дальнейшие опыты позволили измерить

скорости газовых молекул и их диаметры (см. гл. VI). Наконец, применение электронного микроскопа и электронного микропроектора позволило в последние годы сфотографировать отдельные крупные молекулы органических веществ. В настоящее время физиками достаточно подробно изучены и отдельные части атомов, и состав атомных ядер (том III).

Изучение закономерностей движения малых — микроскопических — частиц в XX веке обогатило молекулярно-кинетическую теорию, привело к некоторому пересмотру ее основ и к созданию современной так называемой квантовой статистической физики (некоторые сведения о которой будут даны в томах II и III).

Здесь мы изложим некоторые основные идеи современной молекулярно-кинетической теории вещества и их применение к объяснению ряда свойств газов и общих закономерностей тепловых явлений.

Мы будем исходить из следующих трех основных положений.

1. Все тела состоят из мельчайших частиц — атомов и молекул.

2. Атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного движения.

3. Молекулы различных веществ по-разному взаимодействуют между собой. Взаимодействие это существенно зависит от типа молекул и от расстояний между ними. В частности, зависимостью молекулярных сил от межмолекулярных расстояний объясняется качественное различие разных агрегатных состояний тел (газ, жидкость, твердое тело).

В дальнейшем мы будем различать два вида движения: движение тела как целого (камня, жидкости или газа в сосуде) и хаотическое движение молекул тела, происходящее независимо от того, движется ли тело как целое или нет. Для краткости будем именовать хаотическое движение молекул тела тепловым движением.

Тепловое движение мы будем характеризовать средней кинетической энергией одной молекулы $\varepsilon_{кин}$, а взаимодействие между молекулами — потенциальной энергией взаимодействия $u_{пот}$.

В твердых телах молекулы расположены близко друг к другу, и поэтому свойства этих тел существенно зависят от величины $u_{пот}$. Например, бо́льшая прочность кристалла кварца по сравнению с кристаллом сахара указывает на то, что энергия взаимодействия $u_{пот}$ между молекулами кварца значительно больше, чем $u_{пот}$ для молекул сахара.

Плотность газов при обычных давлениях и температурах в тысячи раз меньше плотности твердых и жидких тел. Это свидетельствует о том, что в газе средние расстояния между молекулами примерно в $\sqrt[3]{1000} = 10$ раз больше, чем в конденсированных телах. При таких расстояниях между молекулами можно ожидать,

что их взаимодействие будет играть очень малую роль, иными словами, средняя кинетическая энергия молекул $\varepsilon_{кин}$ будет значительно больше абсолютного значения средней потенциальной энергии $|u_{пот}|$.

Таким образом, различные вещества отличаются по своим свойствам в силу различия их межмолекулярного взаимодействия, характеризуемого видом и величиной $u_{пот}$. Вследствие быстрого изменения $u_{пот}$ с изменением расстояния между молекулами свойства вещества резко меняются при изменении агрегатного состояния.

При достаточно больших расстояниях между молекулами газа, т. е. в случае достаточно разреженных газов, энергией межмолекулярного взаимодействия $u_{пот}$ можно вообщее пренебрегать. Это означает, что *физические свойства достаточно разреженных газов не должны зависеть от их химической природы.* Конечно, здесь имеются в виду те свойства, которые не зависят от масс молекул, различных для разных веществ.

Мы будем в дальнейшем широко пользоваться идеализированной моделью газа, у которого $u_{пот} = 0$ и, следовательно, энергия которого равна сумме кинетических энергий его молекул. Такой газ называется идеальным газом.

Условие $u_{пот} = 0$ означает, что межмолекулярные взаимодействия сводятся к соударениям между молекулами. Из сказанного выше следует, что достаточно разреженные газы можно приближенно считать идеальными.

Начиная с XVII века, опытами был установлен целый ряд общих законов газового состояния, которые будут перечислены в следующем параграфе.

§ 14. Опытные газовые законы. Уравнение Менделеева — Клапейрона

Обозначим через M массу газа, заключенного в объеме V, t — его температуру и p — давление (в системе СИ давление измеряется в паскалях (Па) и барах (бар); 1 Па = 1 Н/м^2; 1 бар $= 10^5$ Па; 1 атм $= 1{,}01325 \cdot 10^5$ Па $\approx 10^5$ Па = 1 бар).

1. Закон Бойля (1662 г.) и Мариотта (1676 г.), установленный ими экспериментально: *Произведение давления газа на занимаемый им объем при постоянной температуре есть величина постоянная:*

$$pV = \text{const} \quad \text{при} \quad t = \text{const} \quad \text{и} \quad M = \text{const}. \qquad (14.1)$$

2. Законы Гей-Люссака (1802 г.): *Давление газа при постоянных M и V меняется с температурой линейно:*

$$p_t = p_0(1 + \alpha t) \quad \text{при} \quad V = \text{const} \quad \text{и} \quad M = \text{const}, \qquad (14.2)$$

и объем газа при постоянных M и p меняется с температурой

линейно:

$$V_t = V_0(1+\alpha t) \quad \text{при} \quad p = \text{const} \quad \text{и} \quad M = \text{const}, \tag{14.3}$$

где по шкале Цельсия $\alpha = 1/273{,}15$ град$^{-1}$. Переходя к абсолютной температуре по шкале Кельвина

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + T_0 = t + 273{,}15, \tag{14.4}$$

можно переписать законы Гей-Люссака в более удобной форме:

$$p = p_0\alpha T \quad \text{при} \quad V = \text{const} \quad \text{и} \quad M = \text{const}, \tag{14.5}$$

$$V = V_0\alpha T \quad \text{при} \quad p = \text{const} \quad \text{и} \quad M = \text{const}. \tag{14.6}$$

Эти эмпирические законы достаточно точны при не слишком низких температурах и для достаточно разреженных газов, когда межмолекулярные расстояния в среднем много больше линейных размеров молекул (при $T = 0$ из (14.6) следует $V = 0$, что при конечном объеме молекул нелепо; о поведении p при $T \to 0$ см. § 19). Их можно объединить в один закон:

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \quad \text{при} \quad M = \text{const}. \tag{14.7}$$

Очевидно, однако, что при $T = \text{const}$ и $p = \text{const}$ объем газа пропорционален его массе. Исходя из этого, Клапейрон (1840 г.) записал (14.7) в таком виде:

$$\frac{pV}{T} = BM. \tag{14.8}$$

Здесь постоянная B — разная для разных газов. Смысл этого обстоятельства разъяснил Д. И. Менделеев (1875 г.): *массы молекул разных газов неодинаковы.* Согласно закону Авогадро, при равных T и p моли различных газов занимают равные объемы. Следовательно, правая часть уравнения (14.8) будет одной и той же для различных газов, если брать для каждого из них массу одного моля:

$$\frac{pV}{T} = B\mu = \text{const} = R, \tag{14.9}$$

где R — так называемая у н и в е р с а л ь н а я г а з о в а я п о с т о я н н а я.

Заметим попутно, что при использовании системы СГС «моль» означает грамм-молекулу; так как 1 г/моль = 1 кг/кмоль, то численное значение μ в системах СИ и СГС одно и то же.

Численное значение универсальной газовой постоянной находится из закона Авогадро: при $t = 0$ °С и $p = 1$ атм 1 моль любого газа занимает объем $V = 22{,}4$ л. Отсюда

$$R = \frac{1 \text{ атм} \cdot 22{,}4 \text{ л/моль}}{273 \text{ К}} = 0{,}082 \text{ л} \cdot \text{атм/(моль} \cdot \text{К)}; \tag{14.10}$$

так как 1 л = 10^3 см^3, а 1 атм = $1{,}013\cdot 10^6$ дин/см^2, то

$$R = 8{,}31 \text{ кДж/(кмоль}\cdot\text{К)} \approx 2 \text{ ккал/(кмоль}\cdot\text{К)}\ ^{*}).$$

Согласно (14.9) индивидуальная газовая постоянная

$$B = \frac{R}{\mu} \qquad (14.11)$$

обратно пропорциональна молекулярному весу. Подставляя ее значение из (14.11) и (14.8), получаем окончательное уравнение состояния для произвольной массы любого газа

$$pV = \frac{M}{\mu} RT, \qquad (14.12)$$

называемое уравнением Менделеева — Клапейрона. Величина

$$\frac{M}{\mu} = \nu \qquad (14.13)$$

представляет собой число молей данного газа, заключенных в объеме V. Следовательно, уравнение Менделеева — Клапейрона может быть записано в виде

$$pV = \nu RT. \qquad (14.14)$$

Вводя удельный объем газа $v = V/M$ и обратную ему величину — плотность газа $\rho = 1/v = M/V$, можно еще преобразовать уравнение Менделеева — Клапейрона к одному из следующих двух видов:

$$pv = \frac{R}{\mu} T \qquad (14.15)$$

или

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T. \qquad (14.16)$$

Газ, подчиняющийся уравнению Менделеева — Клапейрона, называется идеальным газом. К определению понятия идеального газа с молекулярной точки зрения мы вернемся в начале следующей главы.

Рассмотрим смесь идеальных газов, заключенных в объеме V при температуре T. Обозначим молекулярные веса и массы газов, заполняющих объем через μ_1, M_1; μ_2, M_2; ...; μ_n, M_n соответственно. Назовем теперь давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объем V, парциальным давлением этого газа.

Тогда согласно (14.12) для парциальных давлений газов имеем:

$$p_1 = \frac{M_1}{\mu_1}\cdot\frac{RT}{V}, \quad p_2 = \frac{M_2}{\mu_2}\cdot\frac{RT}{V}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{M_n}{\mu_n}\cdot\frac{RT}{V}. \qquad (14.17)$$

---

*) Согласно ГОСТ (см. предисловие) единицей измерения разности температур служит градус абсолютной шкалы Кельвина, называемый кельвином (К). Этой единицей наряду с градусом Цельсия (°С) мы и будем в дальнейшем пользоваться.

Складывая почленно равенства (14.17), найдем полное давление

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{M_n}{\mu_n}\right)\frac{RT}{V}.$$

Отсюда

$$pV = \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{M_n}{\mu_n}\right)RT. \qquad (14.18)$$

Полученная формула является математическим выражением закона Дальтона: *полное давление газа p равно сумме парциальных давлений всех газов, входящих в смесь.* Сумма в скобках (14.18) представляет собой полное число молей всех газов, заключенных в объеме V.

В технической термодинамике и теплотехнике пользуются индивидуальными газовыми постоянными $B_i = R/\mu_i$, так что закон Дальтона принимает вид

$$pV = (M_1B_1 + M_2B_2 + \ldots + M_nB_n)\,T. \qquad (14.19)$$

Сравнивая (14.19) с (14.12) или (14.14), мы видим, что смесь идеальных газов также подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона. Произведение объема газа V на его давление p численно равно произведению полного числа молей газа $\sum_i \frac{M_i}{\mu_i}$ в этом объеме на универсальную газовую постоянную R и абсолютную температуру T.

Для одного моля газа ($M/\mu = \nu = 1$) уравнение Менделеева — Клапейрона принимает особенно простой вид:

$$pV = RT. \qquad (14.20)$$

§ 15. Хаотичность молекулярного движения

Кинетическая теория идеальных газов должна объяснить свойства газов, в том числе приведенные выше газовые законы. Примем, что молекулы газа движутся согласно законам механики, изложенным в первой части этого тома. Не означает ли это, что задача о свойствах газа и его поведении в тех или иных условиях является просто задачей механики — механики большого числа частиц? Не следует ли считать, например, что все тепловые явления в газах сводятся к механическим, т. е. что возможна чисто механическая теория тепла?

Покажем, что такая точка зрения была бы ошибочной. Специфическими свойствами газов обладают системы, содержащие огромное число молекул. Так, в 1 см^3 воздуха при 0 °С и атмосферном давлении содержится $2{,}687 \cdot 10^{19}$ молекул. Нельзя говорить о газе (в смысле применимости к нему газового уравнения состояния), если имеется в виду система, скажем, 3 или 15 молекул.

Свойства системы молекул не сводимы к свойствам отдельных молекул. Когда молекулы образуют систему, эта система проявляет новые качества, характеризуется новыми физическими величинами, с помощью которых нельзя описать движение отдельных молекул. Так, можно говорить о температуре газа, но нельзя говорить о температуре одной молекулы; упругость (давление) газа есть результат совместного действия всех молекул, несводимого только к «упругости» отдельных молекул (которые в этом смысле упругостью не обладают) и т. д.

Молекулы газа непрерывно движутся, сталкиваются друг с другом, меняя при каждом столкновении свою скорость по величине и направлению. При атмосферном давлении число столкновений, испытываемых молекулой, составляет несколько миллиардов в секунду. Если бы даже фантастическая задача о движении каждой из молекул газа была решена, мы не смогли бы еще сделать непосредственного заключения о свойствах газа как целого.

Особенности движения любой выделенной молекулы не характеризуют свойств газа. Направление движения, скорость, энергия молекулы, ее положение в пространстве все время меняются, в то время как макроскопические характеристики газа как единой системы — давление, температура — остаются неизменными. Следовательно, движение каждой отдельно взятой молекулы не только не может быть установлено, но и не представляет интереса для получения макроскопических параметров системы. То обстоятельство, что движение отдельной молекулы и столкновения между двумя молекулами происходят в соответствии с законами механики Ньютона, еще не означает, что систему молекул — газ — можно изучить с помощью методов механики. С помощью каких же методов можно приступить к изучению свойств газов?

Еще Д. Бернулли указывал, что с повышением температуры скорость молекул (а следовательно, и их кинетическая энергия) возрастает. О какой скорости идет речь? Очевидно, имеется в виду не случайное значение скорости какой-либо молекулы в какой-то момент времени. Речь идет об «устойчивой» характеристике скорости (и энергии) отдельно взятой молекулы — о средней ее скорости (энергии). Поскольку все молекулы газа тождественны по своим свойствам, эти средние величины будут характеризовать уже не только отдельно взятую молекулу, но будут относиться ко всем молекулам газа.

Средние величины вычисляются методами статистики. Раздел физики, в котором применяется в качестве метода исследования статистика, носит название статистической физики.

Хотя движение каждой молекулы в отдельности и подчиняется законам механики, но свойства огромной совокупности молекул, например газа, уже не могут быть объяснены на основе одних пред-

ставлений механики: для их объяснения приходится привлекать более общие представления и методы статистической физики.

Приведем примеры, которые покажут, что свойства огромных систем молекул действительно не могут быть объяснены в рамках чисто механических представлений. Подчеркнем еще раз — речь идет не о невозможности решить задачу о механическом движении очень большого числа частиц. *Речь идет именно о несводимости такой системы к механике, так как при образовании огромных систем молекул возникают новые качества, несводимые к механическим.*

Траектория материальной точки определяется силами, которые действуют на частицу, и начальными условиями — положением и значением вектора скорости в начальный момент времени. Обратно, по значению координат и вектора скорости материальной точки в заданный момент времени можно (при известных, конечно, силах) найти значение координат и вектора скорости в начальный момент времени. Для любой чисто механической системы можно установить совершенно однозначную связь между состояниями в любые фиксированные моменты времени.

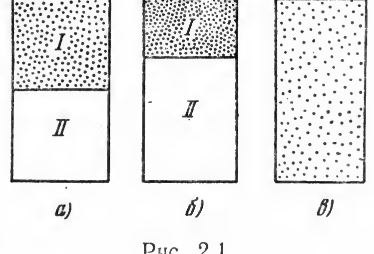


Рис. 2.1.

Представим себе теперь, что в начальный момент времени весь газ находится в части сосуда *I* — половине (рис. 2.1, *а*) или трети (рис. 2.1, *б*), — отделенной от пустой части *II* перегородкой. Уберем перегородку. Газ распределится во всем объеме сосуда (рис. 2.1, *в*), *причем на конечном состоянии газа* — его давлении и температуре — *никак не отражаются начальные условия*. Обратно, по данному состоянию газа никак нельзя судить о его начальном состоянии.

Состояние газа определяется только условиями в данный момент, но не зависит от начальных условий, что резко отличает газ от любых механических систем. Для газа в отличие от механических систем нельзя установить непосредственной связи между состояниями в разные моменты времени.

Механическое движение обратимо. *Состояние же газа для любых реальных процессов оказывается необратимым*. Как бы мы ни ставили потом снятую перегородку, газ, находившийся раньше во всем объеме, не соберется обратно в его части *I* (см. рис. 2.1). При соприкосновении двух тел, имеющих разные температуры, тепло переходит от горячего тела к холодному. Но нельзя так изменить состояние соприкасающихся тел, чтобы тепло начало само по себе переходить от холодного тела к горячему (см. ниже).

Все сказанное выше не означает, что для отдельных молекул мы отказываемся вообще рассматривать величины, отличающиеся

от средних. Кроме средних скоростей, например, мы будем рассматривать различные возможные скорости молекул.

Однако и это изучение будет производиться не методами механики, но методами статистической физики. При этом, конечно, не будет ставиться лишенный всякого интереса вопрос об истинном значении скорости какой-либо молекулы в некоторый момент времени. Мы будем выяснять, какая часть всех N молекул движется с данной скоростью c или проходит путь l между двумя столкновениями, сколько времени молекула обладала скоростью c и т. д.

В качестве исходного предположения примем гипотезу о хаотичности молекулярного движения. В простейшем случае отсутствия внешних сил будем считать, что при движении молекулы возможны любые ее положения в объеме, занятом газом, и ни одно из них (справа или слева, вверху или внизу) не обладает каким-либо преимуществом перед другими. В равной мере это относится и к возможным направлениям скоростей молекул — все направления равноправны, ни одно из них не обладает преимуществами перед другими. Будем считать также, что при движении отдельных молекул положение или скорость данной молекулы не сказывается на положении или скорости любой другой молекулы, т. е. что молекулы газа движутся независимо друг от друга. Это, конечно, не исключает их взаимодействия, например, при столкновениях, когда происходит перераспределение скоростей молекул.

Как уже упоминалось, не имея возможности (необходимости) определять точные значения ряда переменных величин (например, скорости данной молекулы в указанный момент времени), мы будем использовать средние значения этих величин. Но как определить среднюю скорость молекулы, если неизвестны ее истинные значения в различные моменты времени? Заменой истинных значений скорости нам послужат *вероятности того, что молекула такую-то долю времени обладает такой-то скоростью.*

Элементарные сведения о вероятности — одном из основных понятий статистической физики — приведены нами в Приложении I (стр. 328).

§ 16. Статистические закономерности. Распределение молекул по объему

Рассмотрим статистические закономерности распределения молекул идеального газа по объему заполняемого им сосуда. Разделим мысленно этот сосуд на две половины I и II, объемом V каждая (рис. 2.2). Проследим за возможными положениями произвольной молекулы, отмеченной на рис. 2.2 жирным кружочком. С точки зрения произведенного нами пространственного разделения сосуда возможны лишь два различных состояния — когда молекула находится внутри части II (рис. 2.2, *а*) и вне ее, т. е. в части I

(рис. 2.2, *б*). При хаотическом движении молекулы в отсутствие внешних сил (конечно, кроме сил, возникающих при столкновении молекулы со стенками сосуда и не позволяющих ей покинуть последний) эти два состояния одинаково вероятны. Это значит, что хотя молекула будет попеременно переходить из состояния *а* в состояние *б* и находиться в каждом из них то меньшее, то большее время, суммарные времена (при длительном наблюдении) пребывания молекулы в каждом из этих состояний $t_а$ и $t_б$ должны быть практически равны друг другу. Эта закономерность $t_а = t_б$ будет соблюдаться для каждой из молекул, составляющих газ. Однако в коллективе из многих молекул возникают новые статистические закономерности. Проследим за возникновением этих закономерностей при росте количества членов в коллективе.

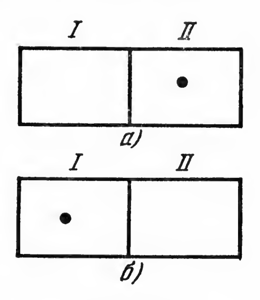


Рис. 2.2.

Простейшим коллективом является идеальный «газ», состоящий всего из двух молекул, движущихся независимо друг от друга. Поскольку в каждом из двух изображенных на рис. 2.2 положений молекулы *1* молекула *2* может находиться в любом из двух таких же состояний, то общее число возможных состояний системы будет $2 \times 2 = 4$. Все эти четыре возможных состояния системы, изображенные на рис. 2.3, равновероятны, т. е. при наблюдении за достаточно большой интервал времени t времена пребывания системы в каждом из этих состояний будут практически равны друг другу: $t_а = t_б = t_в = t_г = {}^1/_4 t$.

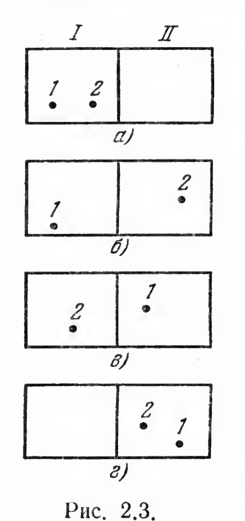


Рис. 2.3.

Характеризуя состояние всей системы состоянием *каждой* из входящих в нее молекул, которые принимаются при этом «отличимыми» одна от другой, мы задаем, как принято говорить, м и к р о с о с т о я н и е системы. Каждое из показанных на рис. 2.3 микросостояний осуществляется одним-единственным способом. Поскольку обе молекулы *1* и *2* одинаковы, то состояния, изображенные на рис. 2.3, *б* и 2.3, *в*, совершенно тождественны по своим физическим характеристикам и свойствам, а значит, по своим макроскопическим проявлениям совершенно неразличимы. Можно рассматривать оба эти состояния как фактически одно состояние, соответствующее равномерному распределению молекул по всему объему $2V$, вне зависимости от того, какими «номерами» обладают молекулы, находящиеся в каждой из половин сосуда.

Мы будем называть состояние системы, которое характеризуется только числом молекул в данной половине сосуда *I* независимо от их номера («индивидуальности»), макросостоянием. В данном примере таких макросостояний всего три:

1. Состояние *а*, когда весь «газ» (обе молекулы) собрался в левой половине сосуда. Это состояние осуществляется одним-единственным способом, $W_a = 1$.

2. Состояние *б*, *в*, когда газ равномерно распределился по всему объему сосуда. Такое макросостояние осуществляется двумя способами, $W_{бв} = 2$, и его средняя длительность $t_{бв} = t_б + t_в = 2t_a$ в два раза больше длительности первого состояния.

3. Состояние *г*, когда весь газ собрался в правой половине сосуда. Это макросостояние осуществляется одним-единственным способом, $W_г = 1$, и его средняя длительность $t_г = t_a$.

Введенные количественные характеристики W_i представляют собой числа микросостояний (способов), которыми осуществляются данные макросостояния и называются термодинамическими вероятностями (которые отличаются от обычных вероятностей множителями, здесь для нас несущественными; определение вероятностей и основные правила обращения с ними см. Приложение I, стр. 328). Уже в приведенном простейшем примере начинает вырисовываться основная статистическая закономерность коллектива — *вероятность равномерного распределения газа по объему больше* (в данном случае только вдвое), *чем вероятность состояния, при котором весь газ соберется в данной половине объема сосуда*. Равномерное распределение газа по объему осуществляется бóльшим числом способов и существует соответственно более длительное время.

Предположим теперь, что в том же сосуде хаотически движутся четыре тождественных молекулы. В этом случае оказываются возможными уже $2^4 = 16$ различных микросостояний, отличающихся расположением индивидуальных молекул в одной из двух выделенных половин объема. Как это показано на рис. 2.4, *а*, с макроскопической точки зрения различных состояний всего пять:

0. Состояние, при котором в левой половине сосуда нет ни одной молекулы. Оно осуществляется одним-единственным способом, и его термодинамическая вероятность $W_0 = 1$.

1. Состояние, при котором в половине *I* сосуда находится одна молекула, а остальные три — в половине *II*. Это макросостояние осуществляется четырьмя микросостояниями, отличающимися тем, какая из четырех молекул находится в части *I*. Для этого макросостояния $W_1 = 4$.

2. Состояние, при котором в половине *I* находятся две молекулы, а остальные две — в правой половине. Число различных микросостояний, которыми осуществляется данное макросостояние,

равно числу возможных сочетаний из четырех молекул по две $W_2 = C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$.

3. Состояние, при котором в левой половине I находятся три из четырех молекул. Для него $W_3 = C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$.

4. Состояние, при котором в левой половине соберутся все четыре молекулы. Такое макросостояние осуществляется только одним-единственным способом, и для него $W_4 = C_4^4 = 1$.

На рис. 2.4, *б* эти точки зависимости W_ν от числа молекул в левой половине сосуда ν нанесены на график. Для того чтобы

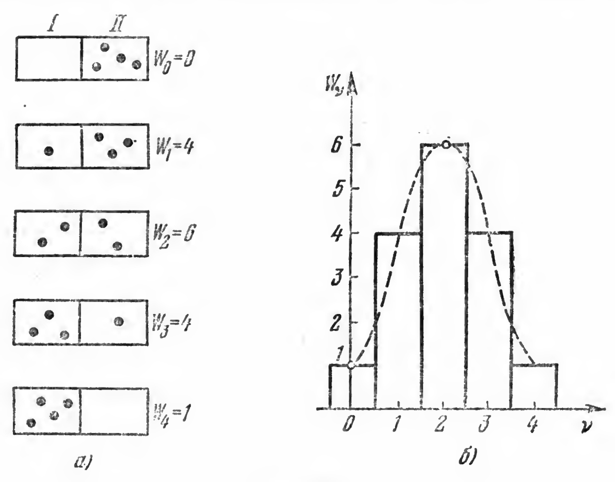


Рис. 2.4.

приблизить вид этого графика, состоящего из точек при дискретных значениях независимой переменной ν, к обычному виду сплошной кривой, построим у каждой точки прямоугольничек высотой W_ν и шириной 1 (по $^1/_2$ вправо и влево), т. е. площадью, также равной W_ν. Эти прямоугольнички образуют так называемую г и с т о г р а м м у, более наглядно характеризующую наше распределение. При построении подобной гистограммы для большого числа молекул высоты соседних прямоугольничков будут мало отличаться друг от друга, и ступенчатая гистограмма может быть практически заменена сплошной кривой, проходящей через точки W_ν. Примерный ход такой усредненной кривой показан на том же рис. 2.4, *б* штриховой линией.

При наличии в сосуде двух молекул термодинамическая вероятность W и длительность существования равномерного распределения была всего в два раза больше термодинамической вероятности и длительности существования состояния, при котором весь «газ»

собирается в заданной левой половине сосуда. При наличии в сосуде четырех молекул эта статистическая закономерность выявляется еще резче. Число микросостояний, которыми осуществляется равномерное распределение W_2, уже в шесть раз больше, чем W_0 для случая, когда газ соберется в левой половине сосуда. На этом примере, однако, начинает проявляться и вторая статистическая закономерность. Оказываются существенными и состояния, близкие к равномерному распределению, когда величина ν немного отличается в ту или иную сторону от соответствующего ему значения $\bar{\nu} = 2$. Термодинамическая вероятность этих соседних состояний $W_1 = W_3 = 4$ всего лишь в $1^1/_2$ раза ниже, чем $W_0 = 6$. Таким образом, коллектив из четырех молекул подавляющую часть времени будет проводить в состояниях равномерного распределения молекул между двумя половинами сосуда и близких к этому.

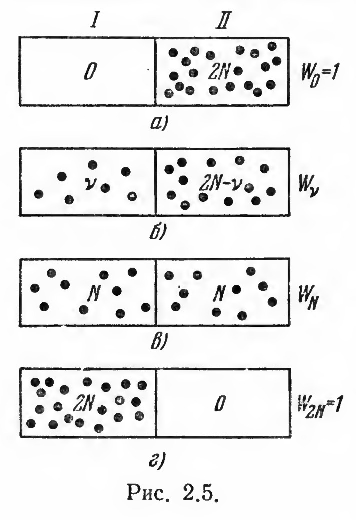


Рис. 2.5.

Чем больше число молекул газа, находящихся в сосуде, тем резче проявляются эти статистические закономерности. Приведем соответствующий расчет. Пусть в нашем сосуде объемом $2V$ находится $2N$ молекул, где N — очень большое число. Тогда оказываются возможными 2^{2N} различных микросостояний, отличающихся распределением индивидуальных молекул между обеими половинами. На рис. 2.5 изображены 4 из возможных $2N+1$ макросостояний системы.

Первый (рис. 2.5, *а*) и четвертый (рис. 2.5, *г*) случаи соответствуют состояниям, при которых газ собрался в одной из половин сосуда. Эти крайние макросостояния, когда число молекул в половине *I* равно $\nu = 0$ или $\nu = 2N$, из всего огромного числа микросостояний 2^{2N} осуществляются каждое лишь одним-единственным способом, и их термодинамические вероятности $W_0 = W_{2N} = 1$. Такие состояния исключительно редки и при больших числах N практически совсем не осуществляются.

Третий случай (рис. 2.5, *в*) соответствует равномерному распределению, когда в каждой половине объема находится одинаковое число молекул N. Полное число различных микросостояний, которыми осуществляется это равномерное распределение, будет равно числу возможных сочетаний из $2N$ молекул по N, т. е.

$$W_N = C_{2N}^N = \frac{(2N)!}{(N!)^2} \approx \frac{2^{2N}}{\sqrt{\pi N}}. \qquad (16.1)$$

Поскольку вычисление факториалов $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots, N$ при больших значениях N представляет собой довольно громоздкую задачу, то мы приводим в (16.1) более простую приближенную формулу, по которой величина W_N может быть вычислена с относительной погрешностью порядка $1/\sqrt{N}$ (так, в приведенном выше примере газа из четырех молекул при $N = 2$ точное значение $W_N = 6$, а приближенное $\frac{2^4}{\sqrt{2\pi}} = 6{,}38$). Очевидно, что $W_N \gg W_0 = W_{2N}$, т. е. равномерное распределение осуществляется в огромное число раз чаще, чем состояние, когда газ соберется в одной половине сосуда.

Для примера укажем, что уже при наличии в объеме всего $2N = 16$ молекул общее число микросостояний $2^{2N} = 2^{16} = 65\,000$, а из них равномерное распределение осуществляется в $W_N = W_8 = 13\,000$ случаях. Правда, это составляет лишь $^1/_5$ от общего времени наблюдения за таким газом. Остальные же 80% времени наблюдается не точно равномерное распределение, но преимущественно близкое к нему.

Для установления того, насколько велики возможные отклонения от равномерного распределения, проанализируем общий случай, когда в части *I* находится некоторое число ν молекул, а в части *II* — остальные $2N - \nu$ (см. рис. 2.5, *б*). Полное число микросостояний, которыми осуществляется это произвольное макросостояние, равно

$$W_\nu = C_{2N}^\nu = \frac{(2N)!}{\nu!\,(2N-\nu)!}. \tag{16.2}$$

Пользуясь известной формулой бинома Ньютона, нетрудно проверить, что сумма термодинамических вероятностей всех $2N + 1$ макросостояний системы ($\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2N$) равна общему числу всех возможных микросостояний:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2N} W_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu=2N} C_{2N}^\nu = (1+1)^{2N} = 2^{2N}. \tag{16.3}$$

Для состояния, отличающегося от равномерного на одну молекулу в ту или иную сторону ($\nu = N \pm 1$), получаем из (16.2)

$$W_{N\pm1} = \frac{(2N)!}{(N-1)!\,(N+1)!} = W_N \cdot \frac{N}{N+1} = W_N \cdot \left(1 + \frac{1}{N}\right), \tag{16.4}$$

т. е. термодинамическая вероятность такого состояния лишь незначительно отличается от равномерного. Для наглядности на рис. 2.6, *а*, *б* представлены сплошными линиями графики зависимости W_ν от ν в двух случаях: при $N = 10$ (20 молекул в сосуде) и $N = 100$ (газ из 200 молекул). Из этих графиков видно, что состояния, термодинамические вероятности которых W_ν по порядку

величины близки к вероятности равномерного распределения W_N, заключены в относительно узком интервале

$$N-\sqrt{N}<\nu<N+\sqrt{N}. \tag{16.5}$$

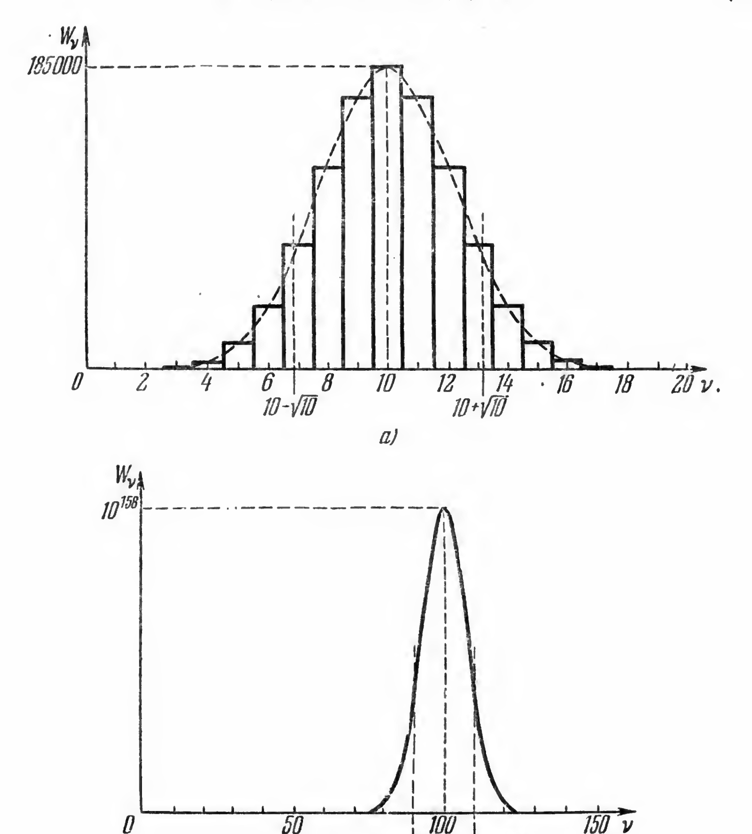


Рис. 2.6.

Если же ν лежит вне этого интервала, т. е.

$$|N-\nu|>\sqrt{N}, \tag{16.6}$$

то вероятности таких макросостояний становятся сравнительно малыми и такие состояния осуществляются сравнительно редко.

Средняя концентрация молекул для всего объема сосуда равна

$$n_{\text{ср}}=\frac{2N}{2V}=\frac{N}{V}. \tag{16.7}$$

Концентрация молекул в половине I объема равна

$$n = \frac{\nu}{V} \tag{16.8}$$

и вследствие хаотического движения молекул непрерывно колеблется около своего среднего значения

$$\bar{n} = \frac{N}{V}, \tag{16.9}$$

равного $n_{ср}$ для всего сосуда. Эти колебания носят название ф л у к т у а ц и й.

Из сказанного следует, что средняя флуктуация концентрации молекул в половине I объема равна

$$\Delta n = \frac{\nu - N}{V} \approx \pm \frac{\sqrt{\bar{N}}}{V}. \tag{16.10}$$

Чем больше число молекул N, тем больше абсолютная флуктуация Δn концентрации молекул в объеме V.

Однако из сравнения (16.19) и (16.10) следует, что при этом флуктуация Δn возрастает медленнее, чем средняя концентрация $\bar{n}$, и поэтому о т н о с и т е л ь н а я ф л у к т у а ц и я концентрации

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}} \tag{16.11}$$

падает с увеличением N.

Соотношение (16.11) остается справедливым и в том случае, если объем V представляет собой не половину, а какую-либо другую произвольную долю полного объема сосуда, а N — соответственно среднее число молекул в объеме V. Это соотношение является одной из важнейших статистических закономерностей молекулярно-кинетической теории: *флуктуации происходят около среднего значения физической величины. При этом относительная флуктуация какой-либо физической величины, зависящей от числа N молекул в данном объеме, с ростом N убывает, как $1/\sqrt{N}$.*

Давление газа p представляет собой результат непрерывных ударов молекул о стенку сосуда и пропорционально общему числу ударяющих молекул N. Если N мало, то стенка будет испытывать отдельные толчки и давление p будет скачкообразно изменяться. С увеличением N будут расти и среднее давление газа $\bar{p}$, и флуктуации последнего Δp. Однако в соответствии с (16.11) флуктуации, хотя и возрастут по абсолютной величине, будут в то же время сказываться все меньше и меньше, так как относительные флуктуации давления будут убывать по закону

$$\frac{\Delta p}{\bar{p}} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}}, \tag{16.12}$$

аналогичному (16.11).

Поэтому важнейшей задачей молекулярно-кинетической теории является *вычисление средних значений физических величин* (давления, плотности, скорости молекул и т. д.) *и установление связей между ними для систем, состоящих из большого числа молекул*. Для решения подобных задач применяются различные методы теории вероятностей и математической статистики. Поэтому все выводы молекулярно-кинетической теории являются для мгновенных значений физических величин несколько приближенными и верными, как говорят, с точностью до флуктуаций. Чем больше число молекул N в системе, тем меньше согласно (16.11) эти относительные флуктуации и тем точнее выполняются все закономерности молекулярно-кинетической теории. Так, например, при нормальных условиях (1 атм и 0 °C) в 1 см^3 воздуха содержатся $N = 2{,}687 \cdot 10^{19}$ молекул. Относительные флуктуации этого числа составляют $1/\sqrt{N} \approx 2 \cdot 10^{-10}$ или 0,00000002%.

При высоком вакууме порядка 10^{-10} атм в том же объеме содержатся $2{,}7 \cdot 10^{9}$ молекул и относительные флуктуации составляют 0,002%, т. е. все еще сравнительно малы.

Полученные выше статистические закономерности о равномерном распределении молекул по занимаемому ими объему и о величине относительных флуктуаций вытекают из хаотичности в распределении отдельных молекул, из случайности положения любой из них.

Равномерное распределение молекул газа по объему реализуется не потому, что оно является единственным возможным, а потому, что оно осуществляется наибольшим числом способов, и вероятность такого распределения в случае большого числа молекул неизмеримо выше вероятности любых других распределений.

ГЛАВА VI

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

§ 17. Средняя скорость молекул. Поток молекул

Молекулы газа в каждый данный момент времени будут отличаться друг от друга не только своим местонахождением в сосуде, но и характером своего движения. Каждая молекула будет двигаться со своей скоростью $\mathbf{c}_i$, отличающейся от скоростей других молекул по величине и по направлению (рис. 2.7).

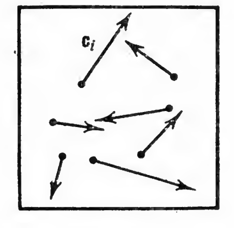


Рис. 2.7.

Если объем, занимаемый газом, неподвижен, то все направления движения молекул равновероятны. Преимущественное направление в движении молекул будет иметь место лишь при движении газа как целого.

Что же касается значений скоростей молекул по величине c_i, то различные скорости не равновероятны. Действительно, энергия (одноатомного) идеального газа E есть сумма кинетических энергий ε_i всех его N молекул:

$$E = \sum_{i=1}^{i=N} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{2} mc_i^2. \tag{17.1}$$

Сталкиваясь друг с другом, молекулы непрерывно обмениваются энергией, и в принципе мыслимо такое состояние газа, когда все его молекулы, за исключением одной, остановятся, а эта последняя будет двигаться с максимально возможной скоростью $c_{\text{макс}}$, определяемой из соотношения

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{1}{2} mc_{\text{макс}}^2 = E. \tag{17.2}$$

Однако столь резко неоднородное распределение молекул по скоростям, так же как и резко неоднородные распределения моле-

кул в пространстве, рассматривавшиеся нами в предыдущем параграфе, будет исключительно маловероятно и практически никогда не осуществится. С наибольшей вероятностью будут осуществляться состояния, при которых энергии различных молекул газа ε_i сравнительно близки друг к другу и мало отличаются от их среднего значения (средние значения физических величин мы будем обозначать черточкой, поставленной над буквой, обозначающей данную величину). Для средней энергии поступательного *) движения $\bar{\varepsilon}_{\text{пост}}$ имеем:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_N^2}{N} = \frac{1}{2} m\overline{c^2}. \qquad (17.3)$$

Величина

$$\overline{c^2} = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_N^2}{N}, \qquad (17.4)$$

входящая в формулу (17.3), представляет собой средний квадрат скорости молекул газа. Извлекая из этой величины квадратный корень, мы получим величину, называемую с р е д н е й к в а д р а т и ч н о й с к о р о с т ь ю:

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_N^2}{N}}. \qquad (17.5)$$

Методами статистической физики так же, как в предыдущем параграфе, можно рассчитать вероятность различных распределений молекул по скоростям и вероятности различных значений скорости отдельной молекулы. Подобные расчеты требуют применения сложных методов математической статистики и теории вероятностей. Они показывают, что, как и следовало ожидать, наиболее вероятными являются макросостояния, при которых скорости отдельных молекул близки к средним.

Поэтому во всем дальнейшем изложении мы можем без существенных погрешностей оперировать непосредственно со средними величинами. Какие неточности возможны при замене истинных значений физических величин их средними, видно из следующего примера.

С р е д н я я а р и ф м е т и ч е с к а я с к о р о с т ь молекул газа определяется из соотношения

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_N}{N}. \qquad (17.6)$$

Сопоставляя (17.6) с (17.4) и (17.5), легко видеть, что средняя арифметическая величина скорости (кратко «средняя скорость»)

*) В случае многоатомных молекул следует учитывать и энергию их вращательного движения $\varepsilon_{\text{вращ}}$ (см. § 33).

не равна средней квадратичной. При нахождении последней по формуле (17.5) сравнительно небольшое число скоростей наиболее быстрых молекул при возведении в квадрат будет вносить непропорционально большой вклад в значение средней квадратичной скорости. Таким образом,

$$\sqrt{\overline{c^2}} > \bar{c}, \quad \text{или} \quad \overline{c^2} > \bar{c}^2. \qquad (17.7)$$

То, что средняя квадратичная величина всегда больше средней арифметической, может быть доказано в общем виде. (На численном примере: среднее арифметическое чисел 3 и 5 будет $\frac{3+5}{2}=4$, а среднее квадратичное из этих величин $\sqrt{\frac{9+25}{2}}=\sqrt{17}=4{,}12$, т. е. на 3% выше.) Для молекул идеального газа средняя квадратичная скорость превышает среднюю арифметическую примерно на 10%.

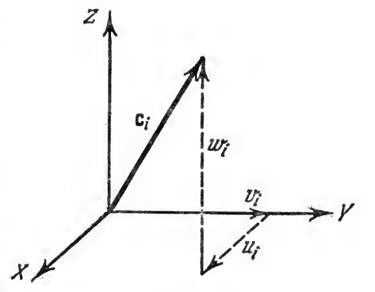


Рис. 2.8.

В последующих выводах вместо громоздких точных статистических расчетов мы будем пользоваться средними значениями физических величин. Как видно из предыдущего примера, полученные таким образом соотношения будут давать правильные качественные зависимости, но численные значения коэффициентов в некоторых случаях могут отличаться от истинных на 10—20%.

Вектор скорости i-й молекулы $\mathbf{c}_i$ может быть разложен на составляющие u_i, v_i и w_i по координатным осям, как это показано на рис. 2.8. Из обобщенной теоремы Пифагора следует, что

$$c_i^2 = u_i^2 + v_i^2 + w_i^2. \qquad (17.8)$$

Вычисляя среднее значение квадрата скорости, получим:

$$\overline{c^2} = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_N^2}{N} =$$

$$= \frac{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_N^2}{N} + \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N} + \frac{w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_N^2}{N},$$

откуда

$$\overline{c^2} = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}. \qquad (17.9)$$

При равной вероятности всех направлений скорости в пространстве средние квадраты составляющих скорости по координатным

осям $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ и $\overline{w^2}$ будут равны друг другу и

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{1}{3}\overline{c^2}. \qquad (17.10)$$

Коэффициент 1/3 здесь является абсолютно точным.

Представим теперь, что в стенке сосуда, перпендикулярной к оси OY, проделано отверстие площадью ΔS. Подсчитаем число молекул ΔN, попадающих в это отверстие и выходящих наружу за промежуток времени Δt. Обозначим число молекул в единице объема внутри сосуда через n.

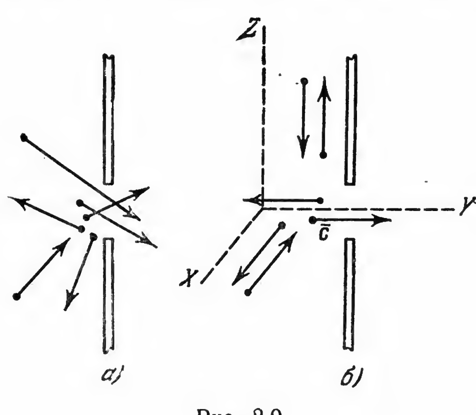


Рис. 2.9.

За рассматриваемый промежуток времени через отверстие будут вылетать молекулы с различными направлениями скорости, находившиеся к началу промежутка Δt на различных расстояниях от отверстия, в зависимости от величины их скорости (рис. 2.9, *а*). Для упрощения расчета примем, что все молекулы движутся с одной и той же скоростью $\bar{c}$. Далее, будем считать, что молекулы могут двигаться лишь в направлении координатных осей OX, OY и OZ. Вследствие равновероятности этих направлений движения, вдоль каждой из осей и, в частности, вдоль оси OY, будет двигаться лишь 1/3 общего числа молекул. Из этой доли половина молекул будет двигаться от отверстия внутрь сосуда, и, следовательно, лишь 1/6 молекул, находящихся в единице объема, будет двигаться в направлении отверстия и сможет выйти из сосуда (рис. 2.9, *б*).

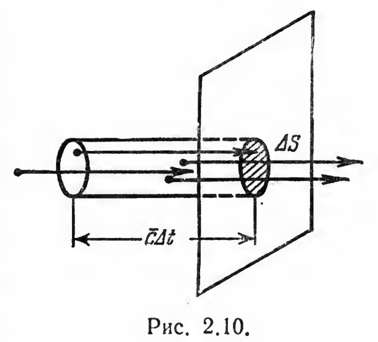


Рис. 2.10.

Для вычисления величины ΔN мысленно выделим в газе цилиндр с площадью основания ΔS и высотой $\bar{c}\Delta t$, равной пути, проходимому молекулой за время Δt (рис. 2.10). Тогда за время Δt через отверстие смогут пройти молекулы, находящиеся от него на расстоянии меньшем $\bar{c}\Delta t$, т. е. внутри выделенного цилиндра объемом $\Delta S\bar{c}\,\Delta t$. Общее число молекул в этом объеме $n\,\Delta S\bar{c}\Delta t$, но лишь 1/6 их дви-

жется вправо по направлению к отверстию и выйдет наружу. Таким образом, искомая величина ΔN равна

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \Delta S \bar{c} \Delta t. \tag{17.11}$$

Площадка ΔS, для которой подсчитывается число проходящих через нее молекул ΔN, может быть расположена перпендикулярно к любой координатной плоскости, по любому произвольному направлению в пространстве, а также не у стенки, а в любом месте внутри сосуда.

Отношение

$$j = \frac{\Delta N}{\Delta S \, \Delta t} \tag{17.12}$$

представляет собой число молекул, проходящих за единицу времени через единицу площади в произвольном направлении. Из (17.11) и (17.12) следует, что поток молекул j равен

$$j = \frac{1}{6} n \bar{c}. \tag{17.13}$$

Полученный при таком упрощенном выводе коэффициент 1/6 в этом соотношении уже не является абсолютно точным. Точный статистический расчет приводит к более правильному значению этого коэффициента, равному 1/4. Естественно, что если заменить в соотношении (17.13) среднюю скорость $\bar{c}$ на среднюю квадратичную $\sqrt{\bar{c^2}}$ или на среднее значение абсолютной величины составляющей скорости в данном направлении $|\bar{v}|$, то численное значение коэффициента должно будет соответственно измениться.

§ 18. Основное уравнение кинетической теории газов

Основным уравнением кинетической теории газов принято называть уравнение, устанавливающее связь между давлением газа, его объемом и энергией. Сила давления газа на стенку сосуда складывается из взаимодействий многочисленных молекул, все время ударяющихся об эту стенку и отскакивающих обратно. Благодаря хаотичности молекулярного движения в отдельные моменты число ударяющих молекул и их скорости будут, вообще говоря, различными и несколько отличающимися в ту или другую сторону от средних значений этих величин.

Применяя сверхчувствительный манометр, мы могли бы обнаружить непрерывные колебания (флуктуации) давления около некоторого среднего значения $\bar{p}$, как это изображено на рис. 2.11. При малом числе молекул N флуктуации давления $\Delta p = p - \bar{p}$ будут сравнимы с величиной самого давления p, и в предельном

случае одной молекулы потеряет всякий смысл само понятие давления, так же как и понятие плотности газа или среднего числа молекул в единице объема. При большом же числе молекул эти флуктуации будут относительно малы и, как было указано в § 16,

$$\frac{\overline{\Delta p}}{\bar{p}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}. \qquad (18.1)$$

В этом случае отклонения мгновенных измеряемых значений давления p от среднего $\bar{p}$ будут ничтожно малы и мы сможем считать, что давление газа на стенки сосуда практически постоянно и равно среднему значению

$$p = \bar{p}. \qquad (18.2)$$

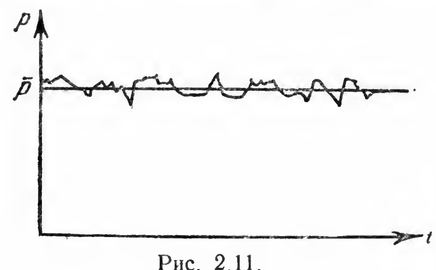


Рис. 2.11.

Основное уравнение кинетической теории будем выводить для идеального газа.

Дадим теперь строгое определение идеального газа. Выше (§ 16) мы называли идеальным газ, подчиняющийся уравнению Менделеева — Клапейрона. Было показано, что это имеет место, если межмолекулярные расстояния таковы, что потенциальной энергией взаимодействия между молекулами можно пренебречь. Чем меньше эта энергия взаимодействия между молекулами, тем лучше удовлетворяет газ уравнению Менделеева — Клапейрона, тем ближе он по своим свойствам к идеальному.

В соответствии с этим мы будем называть газ идеальным, если потенциальную энергию взаимодействия между молекулами можно считать равной нулю. Будем считать, что все возможные взаимодействия между молекулами сводятся при этом к столкновениям, которые происходят только по закону удара абсолютно упругих шаров.

Полная энергия идеального газа сводится, следовательно, к сумме кинетических энергий всех его молекул.

Естественно, что для реальных газов полученные соотношения не будут точными. Однако при достаточном разрежении и не слишком низких температурах реальные газы по своим свойствам будут достаточно хорошо приближаться к идеальным. Следовательно, понятие идеального газа представляет собой абстракцию, сохраняющую основные наиболее важные черты газообразного состояния и отвлекающуюся от второстепенных, менее существенных характеристик последнего. К вопросу об отклонениях поведения реальных газов от уравнения состояния идеального газа мы вернемся ниже, в ч. III.

Выделим на поверхности сосуда достаточно малую площадку ΔS, чтобы можно было ее считать практически плоской.

Пусть все молекулы, находящиеся в сосуде, движутся с одной и той же скоростью c. Как было показано в предыдущем параграфе, лишь 1/6 всех молекул в среднем движется по направлению к стенке, и о площадку за некоторый промежуток времени Δt будут ударяться

$$\Delta N = \frac{1}{6} nc \,\Delta S \,\Delta t \tag{18.3}$$

молекул.

При упругом ударе о стенку, масса которой бесконечно велика по сравнению с массой молекулы m, каждая молекула будет отскакивать обратно со скоростью $-c$ (рис. 2.12). Количество движения каждой молекулы будет при ударе меняться от начального значения $+mc$ до конечного $-mc$ на величину $(-mc) - (+mc) = -2mc$.

В силу закона сохранения количества движения это означает, что стенка сосуда получит импульс, равный по величине и обратный по знаку изменению импульса молекулы. Следовательно, приобретенный стенкой импульс равен $+2mc$.

Полное изменение количества движения молекул, ударяющихся о площадку ΔS в течение времени Δt, будет равно

$$-2mc\,\Delta N = -\frac{1}{3} nmc^2 \,\Delta S\,\Delta t. \tag{18.4}$$

Рис. 2.12.

Средняя сила, с которой действуют ударяющиеся молекулы на площадку ΔS, составит $\Delta F = p\,\Delta S$, где p — сила, действующая на единицу площади, т. е. давление газа на стенку. По третьему закону динамики сила, с которой стенка действует на газ, будет равна $-\Delta F = -p\,\Delta S$, и импульс этой силы за рассматриваемый промежуток времени Δt составит:

$$-\Delta F\,\Delta t = -p\,\Delta S\,\Delta t. \tag{18.5}$$

По второму закону динамики изменение количества движения молекул, ударившихся о стенку, (18.4) должно быть равно импульсу силы (18.5), действовавшей на эти молекулы, т. е.

$$-p\,\Delta S\,\Delta t = -\frac{1}{3} nmc^2\,\Delta S\,\Delta t. \tag{18.6}$$

Сокращая обе части этого равенства на $\Delta S\ \Delta t$, получим окончательно:

$$p = \frac{1}{3} nmc^2. \tag{18.7}$$

Если в выводе учесть, что скорости отдельных молекул c_i могут быть различными, то величину nc^2 следует заменить суммой квадратов скоростей каждой из молекул, находящихся в единице объема, т. е.

$$nc^2 \to \sum_{i=1}^{i=n} c_i^2.$$

Отсюда видно, что в (18.7) следует заменить c^2 на $\overline{c^2}$:

$$c^2 \to \frac{\sum_{i=1}^{i=n} c_i^2}{n} = \overline{c^2}. \qquad (18.8)$$

Учитывая (18.8), мы можем переписать (18.7) в виде

$$\boxed{p = \frac{1}{3} nm\overline{c^2} = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon}_{\text{пост}},} \qquad (18.9)$$

где средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы $\bar{\varepsilon}_{\text{пост}}$ определена уравнением (17.3).

Полученное соотношение называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа**, или **уравнением Клаузиуса**.

Выведем ряд следствий из основного уравнения.

Число молекул в единице объема n можно заменить отношением полного числа всех молекул газа N, находящихся в сосуде, к его объему V, т. е.

$$n = \frac{N}{V}. \qquad (18.10)$$

Производя эту замену, можно переписать (18.9) в виде

$$pV = \frac{2}{3} N\bar{\varepsilon}_{\text{пост}}. \qquad (18.11)$$

Далее, из определения средней энергии поступательного движения молекул и средней квадратичной скорости [см. (17.3) и (17.4)] следует, что

$$N\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \sum_{i=1}^{i=N} \varepsilon_{i\,\text{пост}} = E_{\text{пост}}, \qquad (18.12)$$

где $E_{\text{пост}}$ — суммарная кинетическая энергия *поступательного* движения всех молекул газа.

Используя (18.12), можно основное уравнение переписать в виде

$$pV = \frac{2}{3} E_{\text{пост}}. \qquad (18.13)$$

Следовательно, произведение объема газа на его давление численно равно 2/3 кинетической энергии хаотического поступательного движения всех молекул газа, заключенных в этом объеме. Это соотношение связывает макроскопически наблюдаемые и измеряемые величины p и V с основной характеристикой $E_{\text{пост}}$ микроскопических движений, происходящих внутри газа и обусловливающих наличие давления его на стенку.

Обозначим через N_0 число Авогадро, т. е. число молекул в одной килограмм-молекуле любого газа. Если в объеме заключено $M/\mu = \nu$ кмолей газа, то общее число молекул равно

$$N = \frac{M}{\mu} N_0. \tag{18.14}$$

Подставляя это выражение в (18.11), получим:

$$pV = \frac{M}{\mu} \cdot \frac{2}{3} N_0 \bar{\varepsilon}_{\text{пост}}. \tag{18.15}$$

Сопоставим это уравнение с эмпирическим уравнением Менделеева — Клапейрона (14.12) для того же числа молей:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT. \tag{18.16}$$

Учитывая (18.13), имеем:

$$\frac{2}{3} E_{\text{пост}} = \frac{M}{\mu} RT,$$

или

$$E_{\text{пост}} = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} RT. \tag{18.17}$$

Таким образом, *энергия идеального газа* $E_{\text{пост}}$ (полная энергия, поскольку газ одноатомный и не обладает потенциальной энергией) *прямо пропорциональна его абсолютной температуре.*

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы равна полной энергии газа, деленной на число молекул:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{E_{\text{пост}}}{(M/\mu) N_0}, \tag{18.18}$$

т. е. согласно (18.17)

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} T. \tag{18.19}$$

Величины R и N_0 являются у н и в е р с а л ь н ы м и п о с т о я н н ы м и. Их отношение

$$\frac{R}{N_0} = k \tag{18.20}$$

также является универсальной постоянной и носит название **постоянной Больцмана**. При $R = 8{,}31$ кДж/(кмоль·К) и $N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$ имеем $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К $= 1{,}38 \times \times 10^{-23}$ Дж/К.

Вводя постоянную Больцмана, мы можем переписать выражение для средней кинетической энергии одной молекулы (18.19) в виде

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} kT. \tag{18.21}$$

Таким образом, оказывается, что средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре и является мерой интенсивности теплового движения молекул при заданной температуре. Тем самым формула (18.21) выявляет молекулярно-кинетический смысл понятия температуры. *Температура тела есть количественная мера энергии теплового движения молекул, из которых состоит это тело.* Закономерная связь (18.21) между абсолютной температурой и средней кинетической энергией поступательного движения молекул идеального газа показывает, кроме того, что *при одинаковой температуре средние кинетические энергии молекул всех газов одинаковы, несмотря на различие масс молекул разных газов.*

Подставляя (18.21) в (18.9), мы можем преобразовать основное уравнение кинетической теории газов к виду

$$p = nkT, \tag{18.22}$$

связывающему давление газа p с концентрацией молекул n и абсолютной температурой T.

§ 19. Температура и методы ее измерения. Абсолютный нуль температуры

Остановимся более подробно на определении понятия температуры. Первоначальные представления о степени нагретости тел мы получаем из непосредственного чувственного опыта. Дотрагиваясь до нескольких тел, мы можем сказать, какое из них теплее, а какое — холоднее. Соответственно этому мы скажем, что первое из тел имеет более высокую температуру, чем второе.

Однако возможности нашего непосредственного восприятия весьма ограничены. Для определения температуры тел в большом диапазоне ее изменения, а также для точного количественного суждения о ней необходимо прибегать не к непосредственному ощущению, а к приборам.

Рассмотрим две какие-либо системы, состоящие из большого числа молекул (газы, жидкости или твердые тела). Приведем их в соприкосновение таким образом, чтобы они химически не реаги-

ровали друг с другом, чтобы не происходило переноса вещества из одной системы в другую, чтобы одна система не могла расшириться за счет другой, и вообще, чтобы они *не могли обмениваться механической энергией макроскопических движений.* Для этого в большинстве случаев обе системы необходимо разделить тонкой, но непроницаемой стенкой.

При этом еще остается возможным *переход энергии микроскопических, хаотических движений молекул, составляющих эти системы.* Другими словами, остается возможным обмен *внутренней энергией соприкасающихся систем.* Такой обмен может происходить либо при непосредственном соприкосновении, либо через стенку, отделяющую системы одну от другой.

Суммарную энергию, отданную таким путем одним телом другому, мы будем называть количеством переданной теплоты.

Соприкосновение тел, при котором возможна лишь передача тепла от одного тела к другому, будем называть тепловым контактом этих тел.

При передаче тепла от одного тела к другому будет изменяться энергия хаотического теплового движения молекул в обоих телах, что приведет к изменению ряда физических характеристик этих систем, связанных с тепловым движением. Так, например, как мы видели в предыдущем параграфе, для идеального газа, заключенного в сосуде постоянного объема, с ростом энергии молекулярного движения будет увеличиваться давление [формула (18.13)], а также и его температура.

Мы говорим, что *две системы имеют равные температуры, если при тепловом контакте их состояния не меняются.*

Если же температуры обеих систем различны, то при их соприкосновении будет происходить передача тепла от более нагретого тела к более холодному, и состояния систем будут меняться до тех пор, пока между ними не установится тепловое равновесие. С этого момента температуры обеих систем станут равными.

Если два тела порознь находятся в тепловом равновесии с третьим, то они будут находиться в тепловом равновесии и при непосредственном соприкосновении друг с другом. В этом случае температуры обоих тел одинаковы и равны температуре тела, с которым производится сравнение и которое мы будем называть термометром.

Как уже указывалось, температура есть количественная мера энергии хаотического молекулярного движения в телах. С возрастанием энергии этого хаотического движения увеличивается и температура. Поскольку изменение энергии теплового движения молекул всегда приводит к изменению целого ряда других физических характеристик системы, то по численным значениям этих

характеристик можно судить о температуре и устанавливать соответствующие шкалы.

Простейшими термометрами являются жидкостные. На рис. 2.13 изображен ртутный термометр, состоящий из небольшого резервуара с ртутью, оканчивающегося тонким капилляром. При нагревании ртуть расширяется и ее уровень h в капилляре поднимается. *Шкала и начало отсчета температуры могут быть выбраны произвольно.* Наиболее распространенной в международной практике является стоградусная шкала Цельсия. В этом случае за нуль температурной шкалы (0 °С) принята температура плавления льда при нормальных условиях, т. е. при давлении $p = 1$ атм, а за 100° — температура кипения воды (при тех же условиях). Разделив тогда высоту капилляра h_{100} между этими двумя точками на 100 равных частей, можно определить температуру t в градусах Цельсия по отношению высоты поднятия ртути в капилляре h_t к интервалу между двумя основными постоянными точками, т. е.

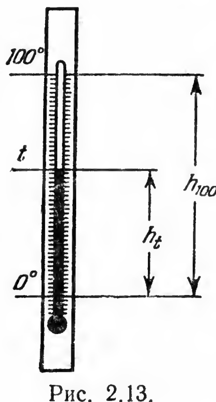


Рис. 2.13.

$$t = \frac{h_t}{h_{100}} \cdot 100\,°\text{C}. \qquad (19.1)$$

Такое определение температуры пригодно лишь для грубых измерений в быту. При более точных измерениях обнаруживается, что для разных термометрических жидкостей, например для ртутного и спиртового термометров, при одинаковой температуре численные значения отношений h_t/h_{100} совпадают друг с другом лишь для выбранных постоянных точек. При промежуточных же температурах показания обоих термометров будут несколько расходиться, так как законы расширения различных жидкостей и сосудов, их содержащих, строго говоря, различны.

Для более точного определения температурной шкалы следует воспользоваться идеальным газом. Поскольку, как мы видели в предыдущем параграфе, идеальный газ должен подчиняться уравнению Менделеева — Клапейрона (18.16), то о температуре газа можно судить по изменению его объема или давления.

В современной технике наиболее удобными являются электрические методы измерения температуры. В так называемых термометрах сопротивления используется изменение сопротивления металлов и полупроводников при их нагревании. Термоэлементами или термопарами измеряется электродвижущая сила, возникающая при нагревании места контакта (спая) двух металлов или полупроводников. Электрические методы измерения температур более подробно будут рассмотрены в томе II.

При любом методе определения температуры на температурной шкале можно отметить некоторую точку, имеющую абсолютное значение. Эта точка отвечает температуре, при которой отсутствует хаотическое (тепловое) движение молекул, и носит название а б с о л ю т н о г о н у л я температуры ($T = 0°$ K). В случае идеального газа значению $T = 0$ отвечает отсутствие кинетической энергии поступательного теплового движения молекул ($\bar{\varepsilon}_{пост} = \frac{3}{2} kT = 0$) и отсутствие давления ($p = nkT = 0$).

Не следует думать, что при абсолютном нуле температуры прекращается *всякое* движение частиц вещества. Даже если все молекулы газа остановятся, то внутри них будут двигаться электроны по определенным орбитам вокруг ядер, определенным образом будут участвовать в движении протоны и нейтроны внутри ядер. Ниже мы убедимся, что, например, средняя кинетическая энергия свободных электронов в металле при абсолютном нуле в сотни раз превышает среднюю кинетическую энергию молекул газа при комнатной температуре и т. д.

Абсолютный нуль температуры означает (если не иметь в виду заведомо идеализированный объект — идеальный газ) *не отсутствие движения, но такое состояние тела, при котором дальнейшее уменьшение интенсивности этого движения за счет отдачи его энергии окружающим телам невозможно.*

Следовательно, *при абсолютном нуле система находится в состоянии с наименьшей возможной энергией.* Характер этого состояния зависит от конкретных свойств составляющих систему частиц.

§ 20. Скорости газовых молекул. Распределение Максвелла

Согласно (18.21) средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре:

$$\bar{\varepsilon}_{пост} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} kT. \tag{20.1}$$

Отсюда можно найти среднюю квадратичную скорость молекул

$$c_{квадр} = \sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_0}}; \tag{20.2}$$

она растет прямо пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры. Для нахождения численных значений скоростей газовых молекул необходимо знать их массы и число Авогадро. Однако поскольку произведение

$$mN_0 = \mu \tag{20.3}$$

есть масса одной килограмм-молекулы, или молекулярный вес, то для расчета $\sqrt{\overline{c^2}}$ можно воспользоваться соотношением

$$\sqrt{\overline{c^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \qquad (20.4)$$

уже не содержащим микроскопических характеристик отдельных молекул. При комнатной температуре $t = 20$ °C, т. е. $T = 293$ K, средняя квадратичная скорость молекул кислорода O_2 равна

$$\sqrt{\overline{c^2}}=\sqrt{\frac{3\cdot 8{,}31\cdot 10^3\ \text{Дж/(кмоль}\cdot\text{К)}\cdot 293\ \text{К}}{32\ \text{кг/кмоль}}}\approx 480\ \text{м/с}.$$

При той же температуре молекулы водорода H_2 с молекулярным весом 2 кг/кмоль, т. е. в 16 раз меньшим, будут иметь скорость в $\sqrt{16} = 4$ раза бо́льшую, т. е. около 2 км/с.

Из приведенных чисел видно, что молекулы окружающего нас воздуха движутся со скоростями порядка скорости полета пуль.

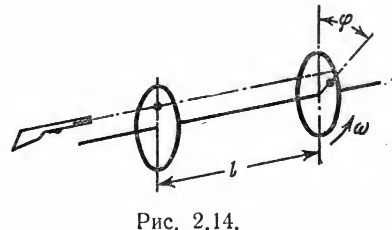


Рис. 2.14.

Для экспериментальной проверки формулы (20.4) можно произвести измерение скоростей молекул методами, аналогичными некоторым методам, применяемым в технике для измерения скорости полета пуль.

Схема одного из простейших методов определения скорости пули изображена на рис. 2.14. Два бумажных диска насажены на расстоянии l друг от друга на общую ось, вращающуюся с известной угловой скоростью ω. Пулей простреливают оба диска параллельно оси вращения. Двигаясь со скоростью v, пуля пробьет сначала первый диск, затем пройдет расстояние между дисками l за время $t = l/v$ и, наконец, пробьет второй диск. За время пролета пули между дисками диски успевают повернуться на угол

$$\varphi=\omega t=\omega\frac{l}{v}.$$

Измеряя угол φ между радиусами, на которых расположены пробоины в обоих дисках, можно отсюда найти искомую скорость пули v по величинам ω, l и φ, определяемыми из опыта:

$$v=\frac{\omega l}{\varphi}. \qquad (20.5)$$

Если, например, мотор, вращающий диски, делает 3000 об/мин, ($\omega = 100\pi$ рад/с) и угол между пробоинами составляет 30°

$\left(\varphi = \frac{\pi}{6}\ \text{рад}\right)$ при расстоянии $l = 1$ м, то скорость пули равна

$$v = \frac{100\pi\,\text{с}^{-1}\cdot 1\ \text{м}}{\pi/6} = 600\ \text{м/с}.$$

Идея этого метода была положена Штерном в основу опыта, позволившего непосредственно измерить скорости теплового движения молекул. Схема опыта Штерна изображена на рис. 2.15, *а*. Два коаксиальных цилиндра вращаются с одинаковой угловой скоростью ω. По оси натянута платиновая проволочка, покрытая слоем серебра и нагреваемая электрическим током. Температура проволочки может быть измерена по ее электрическому сопротивлению или ее свечению оптическим пирометром. Серебро одноатомно, т. е. его молекулы идентичны с атомами. При температуре 1200 °С атомы серебра испаряются с поверхности проволочки и разлетаются во все стороны со скоростями, которые могут быть рассчитаны теоретически по формуле (20.4).

Воздух из всей установки предварительно откачивается, чтобы летящие атомы серебра не испытывали на своем пути столкновений с молекулами воздуха.

Через узкую щель вдоль внутреннего цилиндра вылетает пучок атомов серебра, скорости которых направлены вдоль радиусов.

Пока атом серебра, летящий со скоростью c, проходит расстояние между цилиндрами l, цилиндры успевают повернуться на угол

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{c}.$$

Рис. 2.15.

Попадая на холодную стенку внешнего цилиндра, атомы серебра осаждаются, образуя серебряную полоску, которая представляет собой изображение щели внутреннего цилиндра на внешнем цилиндре, сдвинутое на угол φ (рис. 2.15, *б*). Измеряя этот угол, можно найти скорость теплового движения атомов серебра

$$c = \frac{\omega l}{\varphi}. \tag{20.6}$$

и проверить соответствие измеренного значения ее с выведенным из молекулярно-кинетической теории [формула (20.4)].

Прибор Штерна совершал 45 об/с, и смещение серебряной полоски было достаточно хорошо заметным. Совпадение измеренных значений скоростей молекул с рассчитанными теоретически оказалось исключительно хорошим.

Вследствие хаотичности теплового движения скорости отдельных атомов серебра несколько отличаются друг от друга, и сереб-

ряная полоска на внешнем цилиндре оказалась размазанной, как показано на рис. 2.16. Различная толщина отложившегося серебра при разных значениях угла смещения φ указывает на то, что некоторые значения скорости молекул c встречаются чаще, а другие — реже.

Если молекулы, имеющие скорость c, будут попадать в точки внешнего цилиндра, сдвинутые относительно щели на угол φ, то более быстрые молекулы, имеющие скорость $c + \Delta c$, попадут в точки внешнего цилиндра, сдвинутые на соответственно меньший угол $\varphi - \Delta\varphi$. Изучая относительное количество атомов на отдельных полосках шириной $\Delta\varphi$, можно найти число молекул ΔN_c, скорости которых заключены в интервале от c до $c + \Delta c$.

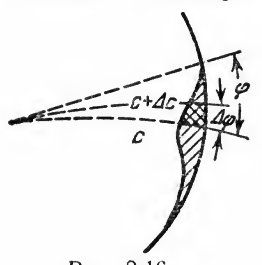


Рис. 2.16.

Изобразим полученный результат графически (рис. 2.17). По оси абсцисс отложим различные возможные значения скоростей молекул c и интервалов этих скоростей Δc. Число молекул ΔN_c, скорости которых лежат в интервале от c до $c + \Delta c$, изобразим на графике площадью заштрихованного прямоугольника, построенного на интервале Δc как основании. Из очевидного тождества

$$\Delta N_c = \frac{\Delta N_c}{\Delta c} \Delta c$$

следует, что высота такого прямоугольника, т. е. его ордината, равна $\Delta N_c / \Delta c$ и представляет собой число молекул, скорости которых заключены в единичном интервале $\Delta c = 1$ вблизи значения c.

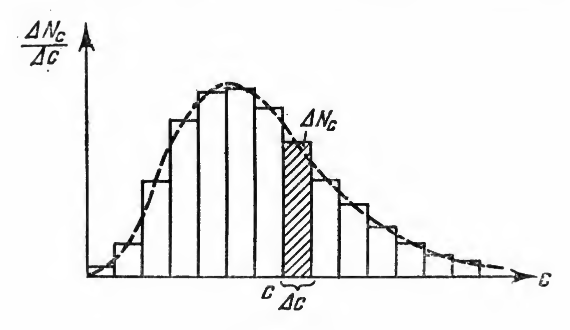


Рис. 2.17.

Заметим, что сумма площадей всех прямоугольников равна сумме всех ΔN_c, т. е. равна полному числу молекул N.

Разбив ось абсцисс на интервалы Δc (например, от 0 до 1 м/с, от 1 до 2 м/с и т. д.) и построив на каждом из этих интервалов соответствующий ему прямоугольник высотой $\Delta N_c / \Delta c$, мы получим

наглядное изображение распределения числа молекул по скоростям. Более высокие прямоугольники показывают, что данное значение скорости c (точнее, интервала скоростей от c до $c+\Delta c$) встречается чаще, так как молекул, обладающих такими скоростями, больше, чем молекул с другими значениями скорости.

Разбивая ось абсцисс на достаточно малые интервалы и переходя к пределу, т. е. заменяя приращения дифференциалами, мы заменим ступенчатую линию сплошной кривой

$$\frac{dN_c}{dc}=f(c), \tag{20.7}$$

изображенной на рис. 2.17 пунктиром. Эта кривая является изображением функции $f(c)$, называемой *функцией распределения молекул по скоростям*.

Как и ранее, сумма всех dN_c, равная полному числу молекул N, изобразится площадью, заключенной между кривой $f(c)$ и осью абсцисс.

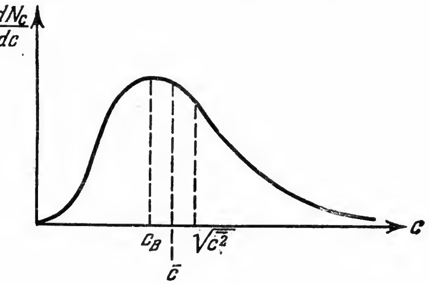


Рис. 2.18.

Теоретическое выражение функции распределения по скоростям молекул идеального газа при тепловом равновесии (20.7) было впервые получено Максвеллом в 1860 г. с помощью применения методов теории вероятности. Позднее Больцман дал более строгое обоснование полученного Максвеллом вывода. Не останавливаясь на громоздких вычислениях, приведем окончательный результат:

$$dN_c=f(c)\,dc=N\cdot 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mc^2}{2kT}}c^2\,dc, \tag{20.8}$$

где N — полное число молекул в объеме. Максвелловская функция распределения молекул по скоростям $f(c)$ изображена на рис. 2.18. Эта функция стремится к нулю при $c\to 0$ и $c\to\infty$. Следовательно, относительное число молекул в газе, обладающих очень малыми или очень большими скоростями (по сравнению со средними), ничтожно мало.

Функция $f(c)$ имеет максимум при значении скорости, равном

$$c_{\text{в}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \tag{20.9}$$

являющимся *наиболее вероятным значением* скорости. Молекулы со скоростями, близкими к $c_{\text{в}}$, встречаются в газе особенно часто.

Кривая (20.8) несимметрична относительно $c_в$, и в газе имеется сравнительно небольшое число молекул с очень большими скоростями. Поэтому средняя арифметическая $\bar{c}$ и средняя квадратичная $\sqrt{\bar{c^2}}$ скорости сдвинуты относительно нее несколько вправо. Вычисления показывают, что

$$\bar{c}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \qquad (20.10)$$

$$\sqrt{\bar{c^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}, \qquad (20.11)$$

$$c_в : \bar{c} : \sqrt{\bar{c^2}} = 1 : 1,13 : 1,22. \qquad (20.12)$$

При возрастании температуры средняя скорость $\bar{c}$ и наиболее вероятная скорость $c_в$ увеличиваются пропорционально $\sqrt{T}$ и максимум распределения (20.8) сдвигается вправо, как это показано на рис. 2.19. При этом число медленных молекул (малые c) убывает, а число быстрых возрастает, но площадь под кривой $f(c)$, равная полному числу всех молекул газа N, остается постоянной.

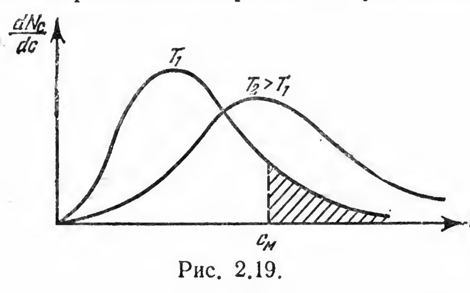


Рис. 2.19.

Хотя относительное число наиболее быстрых молекул с энергиями, значительно превышающими среднюю,

$$\bar{\varepsilon}_{пост}=\frac{m\bar{c}^2}{2}=\frac{3}{2}kT \qquad (20.13)$$

ничтожно мало, в ряде случаев они играют исключительно важную роль. Так, при химических реакциях в первую очередь реагируют эти, обладающие наибольшей кинетической энергией, молекулы, и скорость реакции прямо пропорциональна их числу. Для определения числа $N_м$ молекул, скорости которых превышают заданную величину $c_м$ (а энергия — величину $\varepsilon_м = mc_м^2/2$), необходимо найти заштрихованную на рис. 2.19 площадь «хвоста» максвелловского распределения. Вычисления дают, что

$$N_м \approx Ne^{-\frac{mc_м^2}{2kT}} = Ne^{-\frac{\varepsilon_м}{kT}}. \qquad (20.14)$$

Отсюда видно, что, например, относительное число молекул, энергия которых превышает величину $\varepsilon_м = 2\bar{\varepsilon}_{пост} = 3kT$, равно $e^{-\frac{3kT}{kT}} = e^{-3} \approx 1/20$, т. е. составляет 5%, а величину $4\bar{\varepsilon}_{пост} = 6kT$, равно $\varepsilon^{-\frac{6kT}{kT}} = e^{-6} \approx 1/400$, т. е. составляет 0,25%.

С увеличением температуры показательная функция (20.14) очень круто возрастает. Это объясняет резкое увеличение скорости химических реакций с повышением температуры.

При каждом столкновении молекул в газе изменяются не только направления, но и величины скоростей обеих сталкивающихся молекул. Скорости одних молекул при этом увеличиваются, а других — уменьшаются. Но число молекул, скорости которых лежат в любом определенном интервале скоростей Δc, не меняется. Если в результате столкновений в единицу времени Δn молекул, обладавших скоростью в интервале Δc, изменят свою скорость, то ровно столько же молекул, обладавших раньше другими скоростями, приобретут в результате столкновений скорость в пределах Δc. *Раз установившееся максвелловское распределение по скоростям в дальнейшем сохраняется.*

Более того, как показал Больцман, в результате взаимодействия между молекулами, *каким бы ни было исходное распределение скоростей молекул, в конце концов* (как правило, весьма быстро) *устанавливается максвелловское распределение.*

При этом, конечно, не имеются в виду относительно малые отклонения от максвелловского распределения — флуктуации, неизбежные в силу хаотичного движения молекул. Максвелловское распределение есть статистический закон, верный с тем большей точностью, чем большее число молекул находится в газе.

§ 21. Газ в поле тяжести. Барометрическая формула

Благодаря наличию хаотического теплового движения молекулы газа распределяются по всему предоставленному ему объему, равномерно заполняя последний только в том случае, если на молекулы газа не действуют внешние силы. Атмосферный воздух, окружающий Землю, не ограничен никакими стенками, но не разлетается по всему мировому пространству. Этому препятствует сила земного притяжения.

С другой стороны, при отсутствии теплового движения ($T = 0$) каждая отдельная молекула газа по законам механики должна была бы падать вниз. Все молекулы газа должны были бы скопиться у поверхности земли, где их потенциальная энергия u минимальна.

Благодаря борьбе этих двух взаимно противоположных тенденций устанавливается подвижное равновесие, при котором концентрация молекул воздуха n у поверхности земли максимальна и постепенно уменьшается с высотой. Из выведенного в § 18 соотношения

$$p = nkT \tag{21.1}$$

следует, что по мере подъема над уровнем земли и уменьшения n будет также уменьшаться и атмосферное давление. Зависимость

атмосферного давления p от высоты z носит название барометрической формулы.

Для вывода барометрической формулы используем некоторые упрощающие предположения.

1. Атмосферное давление становится пренебрежимо малым уже на высоте 100—200 км, которая является малой по сравнению с радиусом Земли ($R_З \approx 6370$ км). Поэтому можно считать ускорение силы тяжести g *практически постоянным и не зависящим от высоты.*

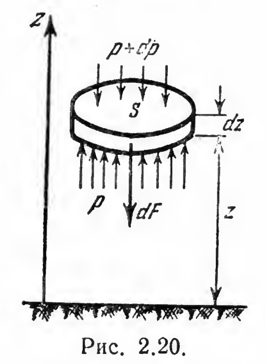


Рис. 2.20.

2. Даже у самой поверхности Земли давление и плотность воздуха сравнительно невелики. Поэтому воздух повсюду можно считать идеальным газом.

Массу каждой молекулы воздуха обозначим через m, пренебрегая в первом приближении небольшой разницей молекулярных весов основных компонентов воздуха — азота ($\mu = 28$ кг/кмоль) и кислорода ($\mu = 32$ кг/кмоль).

3. Температура воздуха с высотой понижается на несколько десятков градусов. Поскольку у поверхности земли абсолютная температура $T \approx 300$ K, то мы пренебрежем этими изменениями температуры и произведем расчет для так называемой изотермической атмосферы, считая $T = \text{const}$.

Выделим мысленно на высоте z над уровнем Земли цилиндрический объем воздуха высотой dz и площадью основания S (рис. 2.20). Давление воздуха на высоте z обозначим через p, а на высоте $z + dz$ соответственно через $p + dp$. Поскольку давление с высотой падает, то его приращение будет отрицательным ($dp < 0$).

На каждую отдельную молекулу массы m действует сила тяжести mg. Число молекул в выделенном элементе равно произведению его объема $S\,dz$ на число молекул в единице объема n. Полный вес молекул в выделенном элементе равен

$$dF = mgnS\,dz. \qquad (21.2)$$

Кроме веса dF, на рассматриваемый объем действует сверху сила давления $(p + dp)\,S$ и снизу сила давления pS. Под действием этих трех сил объем находится в равновесии. Следовательно,

$$nmgS\,dz + (p + dp)\,S = pS. \qquad (21.3)$$

Сокращая на S и преобразуя это равенство, получаем выражение для изменения давления dp при подъеме на высоту dz:

$$dp = -nmg\,dz. \qquad (21.4)$$

Заменив согласно (21.1) n на p/kT, преобразуем (21.4) к виду

$$-\frac{dp}{p}=\frac{mg}{kT}\,dz. \tag{21.5}$$

Отсюда следует, что на любой высоте z при подъеме на одинаковую величину dz давление уменьшается на одинаковую долю $-dp/p$ от своей первоначальной величины. Иначе говоря, когда высота растет по закону арифметической прогрессии, то давление убывает по закону геометрической прогрессии.

Перепишем (21.5) в виде

$$\frac{dp}{p}+\frac{mg}{kT}\,dz=0.$$

Заметим, что отношение dp/p есть дифференциал натурального логарифма $d\,(\ln p)$, а постоянный множитель mg/kT можно внести под знак дифференциала. Тогда

$$d\,(\ln p)+d\left(\frac{mgz}{kT}\right)=d\left[\ln p+\frac{mgz}{kT}\right]=0. \tag{21.6}$$

Из равенства нулю дифференциала величины, стоящей в квадратных скобках, следует, что сама эта величина постоянна. Обозначим эту постоянную через $\ln p_0$. Тогда

$$\ln p+\frac{mgz}{kT}=\ln p_0. \tag{21.7}$$

Из (21.7) следует, что на уровне Земли при $z=0$ $p=p_0$. Таким образом, константа p_0 представляет собой атмосферное давление на поверхности Земли. Определим p:

$$\ln p-\ln p_0=\ln\frac{p}{p_0}=-\frac{mgz}{kT}.$$

Отсюда

$$\frac{p}{p_0}=e^{-\frac{mgz}{kT}},$$

т. е.

$$p\,(z)=p_0e^{-\frac{mgz}{kT}}. \tag{21.8}$$

Для получения соотношения, удобного для вычисления p на разных высотах, воспользуемся тем, что

$$\frac{m}{k}=\frac{mN_0}{kN_0}=\frac{\mu}{R}.$$

Тогда барометрическая формула примет вид

$$p\,(z)=p_0e^{-\frac{\mu gz}{RT}}. \tag{21.9}$$

График зависимости (21.9) изображен на рис. 2.21.

Определим высоту $z_{1/2}$, на которой давление газа падает вдвое,

$$p(z_{1/2}) = \frac{1}{2} p_0.$$

Подставляя в (21.9) и логарифмируя, получим:

$$z_{1/2} = \frac{RT}{\mu g} \ln 2 = 0{,}693 \frac{RT}{\mu g}. \qquad (21.10)$$

Для воздуха, считая его средний молекулярный вес $\mu = 29$ кг/кмоль, найдем:

$$z_{1/2} = 0{,}693 \frac{8{,}31 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}} \cdot 293\ \text{К}}{29 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \cdot 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 6 \cdot 10^3\ \text{м} = 6\ \text{км}.$$

При подъеме на высоту 6 км над уровнем моря атмосферное давление падает до половины первоначального значения. При подъеме на высоту 12 км давление упадет до $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ первоначального и т. д.

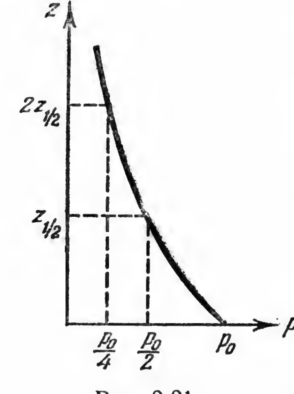


Рис. 2.21.

Измеряя с помощью барометра давление p в горах, можно согласно (21.9) определить высоту места над уровнем моря. На этом принципе основано устройство авиационных высотомеров (**альтиметров**).

Уравнение (21.4), лежащее в основе вывода барометрической формулы, показывает, что разность давлений на двух каких-либо уровнях равна весу столба газа с площадью поперечного сечения $S = 1$, заключенного между этими уровнями. На бесконечной высоте $z \to \infty$ давление $p(z) \to p_0 e^{-\infty} = 0$, т. е. стремится к нулю. Следовательно, давление p на некоторой высоте z численно равно весу столба атмосферы с единичным поперечным сечением, находящегося **над** этим уровнем.

Поскольку p прямо пропорционально n, то для концентрации газовых молекул получается из (21.8) аналогичная зависимость

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}, \qquad (21.11)$$

где согласно (21.8) и (21.1) число молекул в единице объема газа у поверхности Земли равно

$$n_0 = \frac{p_0}{kT}. \qquad (21.12)$$

Анализируя полученные соотношения, мы видим (см. § 7), что величина

$$mgz = u(z) \tag{21.13}$$

представляет собой потенциальную энергию одной молекулы, поднятой в поле тяжести на высоту z ($u(z) = 0$ при $z = 0$, т. е. $u(0) = 0$). Соотношение (21.11) тогда можно переписать в виде

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{u(z)}{kT}}. \tag{21.14}$$

Изменение концентрации молекул с высотой зависит от соотношения между энергией теплового движения kT и потенциальной энергией молекул $u(z)$ на данной высоте.

Как показал Больцман, *соотношение* (21.14) *остается справедливым в самом общем случае при наличии любых внешних сил* (а не только в поле тяжести). Поэтому формула (21.14) носит название распределения Больцмана.

Более того, из сопоставления (21.14) с (20.8) и (20.14) видно, что зависимость вероятности состояния от энергии имеет общий характер, идет ли речь о распределении в пространстве (потенциальная энергия) или по скоростям (кинетическая энергия). Вообще, если частица может находиться в различных состояниях с энергиями

$$E_1 < E_2 < E_3 < \ldots < E_i < \ldots, \tag{21.15}$$

то при данной абсолютной температуре T вероятность w_i ее нахождения в состоянии E_i пропорциональна

$$w_i \sim e^{-\frac{E_i}{kT}}, \tag{21.16}$$

т. е. чем выше энергия E_i, тем реже будет осуществляться данное состояние. Для совокупности одинаковых частиц их количества N_i в состояниях E_i будут пропорциональны вероятностям w_i и находиться в аналогичном соотношении

$$N_i \sim e^{-\frac{E_i}{kT}}, \tag{21.17}$$

как это, в частности, видно на примере распределения (21.14) концентрации молекул газа в поле тяжести.

§ 22. Опыты Перрена. Определение числа Авогадро

Вернемся к формулам, описывающим изменение давления (21.8) или концентрации молекул (21.11) с изменением высоты столба газа, находящегося в поле тяготения. Отношение давлений или плотностей на двух высотах равно

$$\frac{p(z_1)}{p(z_2)} = \frac{n(z_1)}{n(z_2)} = \frac{e^{-\frac{mg}{kT}z_1}}{e^{-\frac{mg}{kT}z_2}} = e^{-\frac{mg}{kT}(z_1 - z_2)} \tag{22.1}$$

Обратим внимание на следующие особенности полученного выражения.

1. *Отношение давлений и отношение числа частиц зависит только от разности высот* $(z_1 - z_2)$, *но не самих высот.*

Отмеченная особенность иллюстрировалась рис. 2.21.

2. *Скорость изменения давления и концентрации частиц зависит от молекулярного веса газа.* При увеличении веса молекул в a раз то же изменение давления будет иметь место при меньшем в a раз подъеме:

$$e^{-\frac{mg}{kT}(z_1 - z_2)} = e^{-\frac{(am)\,g}{kT}\frac{z_1 - z_2}{a}}. \quad (22.2)$$

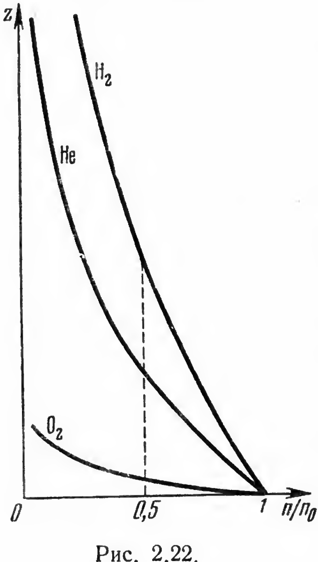


Рис. 2.22.

Если бы земная атмосфера состояла из чистого кислорода, то при 0 °C давление падало наполовину при подъеме на 5 км. В случае чистого водорода с молекулярным весом, в 16 раз меньшим (при 0 °C), давление убывало бы наполовину при подъеме на высоту $16 \cdot 5$ км $= 80$ км.

На рис. 2.22 приведено схематическое изображение распределения молекул водорода, гелия и кислорода при одинаковых условиях в поле тяготения.

Перрен поставил опыты, с помощью которых оказалось возможным проверить правильность вывода (22.2). Известно, что мелкие пылинки, будучи взвешены в газе или жидкости, не оседают, но принимают участие в молекулярном движении (б р о у н о в с к о е д в и ж е н и е). Поскольку полученные выше формулы не содержат каких-либо ограничений масс молекул, нельзя ли применить их и для этого случая? Другими словами, нельзя ли считать пылинки, или броуновские частицы сверхгигантскими «молекулами» (конечно, не в химическом смысле, а лишь в отношении их распределения в пространстве)?

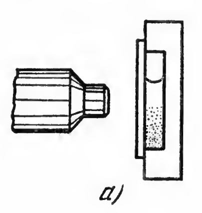
При массе частицы, превышающей массу молекулы кислорода в 10^8 раз, уменьшение концентрации вдвое должно произойти при подъеме на высоту в 50 мкм $= 5 \cdot 10^{-3}$ см (вместо 5 км для кислорода). Если изучается распределение броуновских частиц, взвешенных в воде, то по закону Архимеда вместо истинного веса частицы следует брать разность между весом частицы и весом вытесненной ею воды.

Перрен получал «броуновские частицы» из эмульсии двух смол: гуммигута и мастики. Изготовленные с помощью специальной мето-

дики эмульсии содержали шарики одинаковых размеров. Радиусы шариков смолы, использовавшихся для опытов, измерялись тремя различными методами, дававшими расхождения в пределах 1—2%. Тем самым достаточно точно определялась масса шариков, так как плотность смол была хорошо известна ($m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$, где r — радиус шариков, ρ — плотность смолы).

Эмульсия смолы помещалась в плоскую кювету глубиной 0,1 мм (рис. 2.23); кювета закрывалась стеклом, края которого во избежание испарения эмульсии заливались парафином. Наблюдения шариков эмульсии можно было вести, конечно, только с помощью микроскопа, причем были возможны два расположения приборов (рис. 2.24, *а* и *б*).

Для точных измерений пригоден способ *б*. В способе *а* в поле зрения видны частицы, находящиеся на разной высоте. Если использовать микроскоп с малой глубиной поля зрения, то при способе *б* виден только один горизонтальный слой препарата толщиной $\sim$ 1 мкм. Ограничив поле зрения диафрагмой так, чтобы легко было сразу подсчитать число видимых частиц, можно подсчитать число частиц, наблюдаемых в поле зрения в данный момент и на данной высоте.



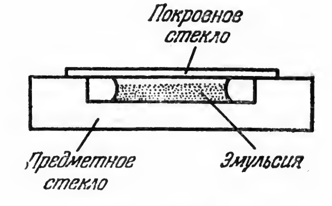


Рис. 2.23.

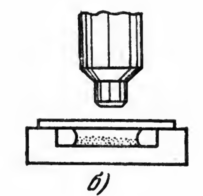


Рис. 2.24.

Конечно, система броуновских частиц, взвешенных в жидкости, — далеко не идеальный газ. Тем не менее было найдено хорошее соответствие теории и опыта. Использовались шарики смолы самых различных масс: наиболее тяжелые превышали по массе наиболее легкие в 15 000 раз. За счет добавления глицерина вязкость жидкости, в которой перемещались шарики, менялась в 125 раз. С ростом вязкости возрастало время, в течение которого устанавливалось правильное распределение частиц по высоте, но оно всегда устанавливалось и, установившись, впоследствии сохранялось. Плотность вещества частиц эмульсии менялась в 6 раз и относительно глицерина даже оказывалась отрицательной, так что

число частиц возрастало не книзу, но кверху. Проверялась зависимость от температуры, и при любых условиях, в пределах точности опыта, имело место совпадение с теорией.

В формулу (22.1) неявно входит важная постоянная — число Авогадро N_0. Поскольку опыты дают хорошее соответствие с теорией, можно попытаться найти ее численное значение. Прологарифмируем формулу (22.1):

$$\ln\frac{n_1}{n_2}=\frac{mg}{kT}(z_2-z_1) \tag{22.3}$$

и умножим числитель и знаменатель правой части на N_0. Приняв во внимание, что $N_0k = R$, получим:

$$\ln\frac{n_1}{n_2}=\frac{N_0 mg}{RT}(z_2-z_1)$$

или

$$N_0=\frac{RT\ln\frac{n_1}{n_2}}{mg(z_2-z_1)}. \tag{22.4}$$

Все величины, стоящие в правой части формулы (22.4), определяются из опыта. R определяется из опытов с газами с помощью уравнения Менделеева — Клапейрона; $\ln\frac{n_1}{n_2}$ определяется непосредственно наблюдением числа частиц на разных уровнях (z_1 и z_2). Масса частицы m, как уже указывалось, измерялась с помощью трех различных методов. Первые работы Перрена привели к значению

$$N_0=6{,}8\cdot 10^{26}\ \text{атомов/кмоль}.$$

Дальнейшие опыты позволили определить число Авогадро с большей точностью, причем, как оказалось, отклонение от ныне принятого значения N_0 не превышало 1%.

Зная N_0 и массу килограмм-молекулы $\mu = N_0m$, можно определить массу молекулы любого вещества. По объему V_μ килограмм-молекулы жидкости или твердого тела можно оценить объем, приходящийся на 1 молекулу ($d^3 \approx V_\mu/N_0$), а следовательно, и порядок диаметра молекул $\sqrt[3]{V_\mu/N_0}$.

По современным данным $N_0 = 6{,}02\cdot 10^{26}$ атомов/кмоль; масса атома водорода $m_{\text{H}} = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг; диаметры атомов гелия $1{,}7 \times 10^{-10}$ м, аргона — $2{,}8\cdot 10^{-10}$ м, ртути — $2{,}9\cdot 10^{-10}$ м.

В следующем параграфе мы увидим, что наблюдение частиц эмульсии дает еще один независимый способ определения постоянной Авогадро, а значит, и масс и размеров атомов.

§ 23. Броуновское движение

Рассмотрим подробнее известное уже нам явление броуновского движения. Из описанных работ Перрена следовало, что шарики эмульсии с достаточно хорошим приближением подчиняются законам идеального газа. *Средняя кинетическая энергия молекул газа* $\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = {}^1/_2\, m\overline{c^2}$ *не зависит от массы молекулы* и определяется только температурой газа:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m\overline{c^2} = \frac{3}{2} kT.$$

Следовательно, такой же средней кинетической энергией будут обладать и сверхгигантские «молекулы» — броуновские частицы. При равных энергиях скорости броуновских частиц, конечно, много меньше молекулярных. Для средней квадратичной скорости имеем

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

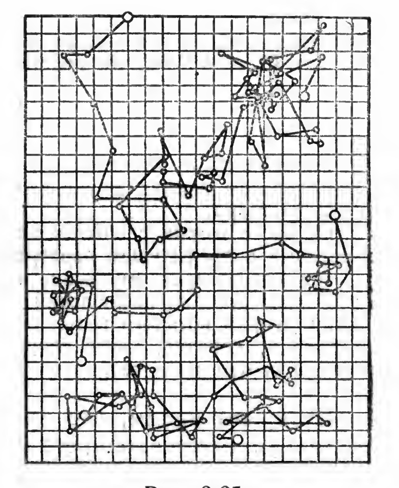


Рис. 2.25.

При массе частиц эмульсии, в 10^{14} раз большей массы молекулы, их скорости будут в $\sqrt{10^{14}} = 10^7$ раз меньше скорости молекул и равны примерно $5 \cdot 10^{-3}$ см/с. Однако непосредственное перемещение броуновской частицы с этой скоростью не может наблюдаться. Дело в том, что перемещение частицы не прямолинейно, но меняется весьма часто по величине и направлению. Если отмечать через равные промежутки времени координаты x и y какой-либо одной броуновской частицы (игнорируя ее перемещения в вертикальном направлении) и полученные таким образом точки соединить прямыми линиями, мы получим картину, весьма напоминающую траекторию молекулы газа. На рис. 2.25 приведены полученные Перреном «траектории» трех броуновских частиц.

16 клеток рисунка отвечают длине 50 мкм. Положения броуновских частиц отмечались через 30 с. Расстояние между начальной и конечной точками много меньше всей длины ломаной. Однако и полученные таким образом ломаные не равны истинной длине траектории.

Если бы применялся микроскоп с бо́льшим увеличением, а интервал наблюдения составлял 1 с, каждый отрезок ломаной в свою очередь оказался бы ломаной, состоящей из 30 отрезков,

причем по своему характеру эта ломаная отличалась бы от большой только своим масштабом, но не формой. Таким образом знание средней квадратичной скорости еще не позволяет сделать заключение о пути, проходимом броуновской частицей за определенное время.

Решение задачи о движении броуновской частицы дали Эйнштейн и Смолуховский в 1905—1906 гг. Они нашли, что за время t проекция смещения броуновской частицы на какое-либо направление, например на ось x, пропорциональна не времени (как это было бы при прямолинейном движении), но корню квадратному из времени:

$$x \sim \sqrt{t}. \tag{23.1}$$

Математический расчет приводит к следующему результату:

$$x^2 = \frac{kT}{3\pi r\eta} t, \tag{23.2}$$

где через r обозначен радиус броуновской частицы, η — вязкость жидкости. Так как $kT = RT/N_0$, то, подставляя это выражение в (23.2), получаем:

$$N_0 = \frac{RT}{3\pi r\eta} \frac{t}{x^2}. \tag{23.3}$$

Справа в (23.3) все величины определяются непосредственно опытным путем. Таким образом, анализ броуновского движения дает еще один способ определения числа Авогадро.

Согласие теории с опытом оказалось столь же хорошим, как и в опытах, описанных в предыдущем параграфе.

Изготовив зерна эмульсии, на которых были заметны пятнышки, Перрен сумел провести ряд наблюдений и над вращательным движением броуновских частиц, теория которого также была дана Эйнштейном. Эти наблюдения, более трудные и, конечно, менее точные, также показали в пределах погрешности хорошее соответствие теории с опытом.

Итак, мы видим, что хаотическое тепловое движение присуще не только микроскопическим молекулам, но и макроскопическим телам. При одинаковой температуре средняя энергия *поступательного* движения

$$\frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} kT \tag{23.4}$$

одинакова для любой микроскопической частицы и макроскопического тела. Различие в массах тел приводит лишь к резкому количественному различию скоростей этого хаотического движения. Если молекулы газа движутся со скоростью пули, то камень с массой $m = 1$ кг в целом должен иметь среднюю квадратичную скорость поступательного движения

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1}} \approx 10^{-10} \text{ м/с}.$$

Такие огромные количественные различия в скоростях теплового движения молекул, броуновских частиц и «камней» обуслов-

ливают и огромную качественную разницу в их свойствах. Молекулы газа непрерывно перемещаются на расстояния, много бо̀льшие их размеров, и эти перемещения определяют поведение газа в замкнутом сосуде и свободной атмосфере. Напротив, для макроскопических тел, таких как камни, хаотические перемещения ничтожно малы по сравнению с их размерами и практически никак не сказываются на поведении последних.

В измерительной технике, однако, представляют значительный интерес и промежуточные случаи. Легкие рамочки и нити прецизионных высокочувствительных приборов начинают совершать хотя и слабые, но уже заметные флуктуационные колебания. Слабые токи в электронных лампах начинают испытывать заметные искажения вследствие флуктуаций, возникающих в различных частях электрической схемы и т. д.

Эти флуктуационные явления в ряде случаев ставят пределы возможной точности измерений и требуют специального внимательного анализа.

В настоящей главе мы разобрали ряд основных выводов молекулярно-кинетической теории применительно к предельному случаю идеального газа и сопоставили полученные результаты с опытом.

Блестящее подтверждение всех этих выводов на опыте убедительно доказывает правильность основных положений кинетической теории и методов статистической физики.

Особой простотой и наглядностью отличаются опыты Перрена, описанные в последних двух параграфах. Как отмечал сам Перрен, в результате его опытов стало уже невозможным отрицать объективную реальность молекул.

Становится видимым и движение молекул — броуновское движение есть его воспроизведение. Точнее, оно и есть собственно молекулярное движение, ибо броуновская частица есть не что иное, как огромная «молекула» (конечно, только в отношении движения, но не химическом).

ГЛАВА VII

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

§ 24. Явления переноса

Молекулы пахучей жидкости, испаряясь, перемещаются среди молекул воздуха даже при отсутствии конвекции. При обычных температурах молекулы движутся со скоростью пули. Однако мы, находясь в одном конце комнаты, не можем почувствовать через тысячные доли секунды запах жидкости, пролитой в другом конце комнаты. В спокойном воздухе молекулы пахучего вещества дойдут до противоположного конца комнаты за сравнительно большой промежуток времени. Это кажущееся противоречие с выводами кинетической теории объясняется тем, что движущаяся в газе молекула непрерывно сталкивается со встречными молекулами и при этом каждый раз изменяет направление своего движения. Таким образом, молекула описывает довольно сложный ломаный путь, похожий на траекторию броуновской частицы, изображенную на рис. 2.25, и лишь весьма медленно удаляется от своего первоначального положения.

Постепенное распространение в газе молекул примеси от места их ввода в газ носит название *диффузии*.

Пусть в газе движется какое-либо тело (человек, поезд, автомобиль или самолет) с некоторой скоростью **v**. До сих пор мы считали, что столкновения молекул газа с поверхностью таких тел происходят по закону удара абсолютно упругих шаров. В действительности же молекулы, ударяющиеся о поверхность тела, частично «прилипают» к ней — адсорбируются, а через некоторое время «испаряются» с нее. Если тело в газе неподвижно и имеет одинаковую с ним температуру, то распределения по скоростям молекул, падающих на поверхность тела, и молекул, покидающих его, отличаются друг от друга так, что одно является как бы зеркальным отражением другого. При этом остается справедливым расчет, который был произведен при вычислении давления газа. Если же тело движется, то при абсолютно упругих столкновениях будет меняться лишь нормальная к поверхности тела составляю-

щая скорости молекулы. При адсорбции же с последующим испарением молекулы и твердое тело будут обмениваться и тангенциальными к поверхности твердого тела составляющими скорости. Для простоты можно представлять, что молекулы, ударяющиеся о поверхность этого тела, будут увлекаться последним и, отскакивая, приобретут дополнительную скорость **v**.

Таким образом, при взаимодействии со сталкивающейся молекулой массы m тело передаст последней некоторое небольшое количество движения $m\mathbf{v}$ в направлении своего движения. В процессе многочисленных столкновений движущееся тело будет, таким образом, передавать газу часть своего количества движения. Газ при этом будет ускоряться, на границе с твердым телом на него будет действовать суммарная средняя сила **F** в направлении движения тела. По третьему закону динамики на тело со стороны газа будет действовать сила — **F**, замедляющая его движение, — сила трения.

Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа, движущимися по какой-либо причине с различными скоростями. Это явление носит название внутреннего трения, или вязкости газа.

Наконец, если в соседних слоях газа создана или поддерживается разная температура, то между ними будет происходить обмен тепла. Средняя энергия молекул газа, пропорциональная согласно (18.19) абсолютной температуре T, в обоих слоях будет различной. Благодаря хаотическому движению, молекулы в обоих слоях будут перемешиваться и средние энергии, а следовательно, и температуры слоев будут стремиться выравняться. При этом будет наблюдаться перенос энергии от более нагретых к более холодным слоям. Этот процесс носит название теплопроводности.

В процессе диффузии происходит перенос вещества примеси из областей с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией этой примеси. При внутреннем трении в газе переносится количество движения. Наконец, при теплопроводности мы наблюдаем перенос тепла от более нагретых областей к более холодным.

В основе всех этих трех различных физических явлений лежит один и тот же молекулярный механизм — хаотическое движение и перемешивание молекул. Общность механизма, обусловливающего все эти явления переноса, приводит к тому, что их закономерности должны быть похожи друг на друга, а количественные характеристики — тесно связаны друг с другом.

Как видно при предварительном рассмотрении явления диффузии, скорость этого процесса определяется частотой столкновений со встречными молекулами и путем, проходимым молекулой

от одного столкновения до следующего, называемым **длиной свободного пробега**. Поэтому для вывода основных закономерностей явлений переноса с помощью молекулярно-кинетической теории необходимо предварительно определить длину свободного пробега молекул в газах и выяснить ее зависимость от состояния газа.

§ 25. Число столкновений и длина свободного пробега молекул в газе

На рис. 2.26 изображена траектория движения молекулы в газе. Величина l_i представляет собой путь, который пролетает молекула свободно от одного столкновения до следующего, — длину свободного пробега молекулы. Вследствие хаотичности молекулярного движения величины последовательных длин свободных

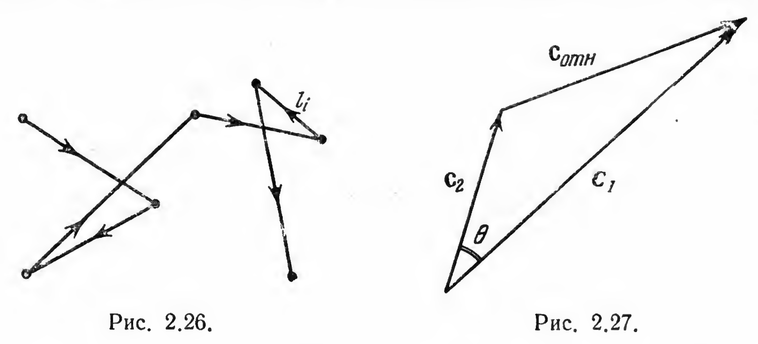


Рис. 2.26. Рис. 2.27.

пробегов l_i постоянно меняются. Неизменным при данных условиях остается лишь их среднее значение, которое мы обозначим через l:

$$l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} l_i, \qquad (25.1)$$

и назовем **средней длиной свободного пробега**.

Теоретическое вычисление величины l возможно на основе конкретной модели газа. Примем для упрощения расчета следующую модель идеального газа. Будем считать, что молекулы газа являются твердыми шариками одинакового диаметра d, взаимодействующими лишь при непосредственном соприкосновении по законам столкновения упругих шаров. Тем самым, в отличие от предыдущей главы, мы учтем протяженность молекул.

Пусть до столкновения молекулы имели скорости $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$. Величины этих скоростей, их направления, а следовательно, и угол θ между ними (рис. 2.27) при каждом столкновении могут быть раз-

личными. Введем относительную скорость движения первой молекулы относительно второй

$$\mathbf{c}_{\text{отн}} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2. \tag{25.2}$$

Из треугольника на рис. 2.27 по теореме косинусов имеем:

$$c_{\text{отн}}^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos\theta. \tag{25.3}$$

Поскольку среднее значение суммы нескольких величин равно сумме средних значений величин, то

$$\overline{c_{\text{отн}}^2} = \overline{c_1^2} + \overline{c_2^2} - \overline{2c_1c_2 \cos\theta}. \tag{25.4}$$

Среднее значение квадратов абсолютных скоростей всех молекул одинаково:

$$\overline{c_1^2} = \overline{c_2^2} = \overline{c^2}. \tag{25.5}$$

Для нахождения последнего слагаемого в (25.4) примем во внимание, что направление движения сталкивающихся молекул может быть самым произвольным, а угол θ с одинаковой вероятностью может принимать значения как меньше $\pi/2$, так и больше $\pi/2$. Поэтому $\cos\theta$ может с равной вероятностью иметь как положительные, так и отрицательные значения, и среднее арифметическое этих значений равно нулю:

$$\overline{\cos\theta} = 0. \tag{25.6}$$

Таким образом,

$$\overline{c_{\text{отн}}^2} = 2\overline{c^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{\overline{c_{\text{отн}}^2}} = \sqrt{2}\sqrt{\overline{c^2}}, \tag{25.7}$$

т. е. средние значения относительных скоростей молекул в $\sqrt{2}$ раз больше соответствующих средних значений абсолютных скоростей.

Точный расчет числа столкновений, испытываемых молекулой в единицу времени, производится методами статистики и весьма сложен. Поэтому мы ограничимся следующим приближением. Будем считать все молекулы неподвижными, за исключением одной, движущейся относительно них со средней скоростью

$$\overline{c_{\text{отн}}} = c \cdot \sqrt{2}. \tag{25.8}$$

В результате соударений с другими молекулами центр рассматриваемой молекулы будет двигаться по ломаной линии, изображенной на рис. 2.28. Всякий раз, когда центр соседней молекулы окажется на расстоянии, не большем d (диаметр молекулы) от этой линии, будет происходить столкновение и изменение направления движения движущейся молекулы.

В конце концов данная молекула испытает столкновения со всеми молекулами, центры которых окажутся в пределах ломаного цилиндра радиуса d. Спрямляя этот цилиндр, мы ошибемся в опре-

делении его объема на пренебрежимо малую величину, так как длина каждого прямолинейного отрезка много больше диаметра цилиндра ($l \gg d$).

За единицу времени данная молекула проходит путь $\bar{c}_{\text{отн}} \cdot 1 = \bar{c}_{\text{отн}}$. Объем Ω спрямленного цилиндра, отвечающего этому пути,

$$\Omega = \overline{c_{\text{отн}}} \pi d^2. \tag{25.9}$$

Считая, что концентрация газовых молекул n постоянна и равна

$$n = \frac{N}{V}, \tag{25.10}$$

найдем число молекул z, центры которых лежат внутри цилиндра Ω,

$$z = n \pi d^2 \overline{c_{\text{отн}}}. \tag{25.11}$$

Со всеми этими молекулами и столкнется за единицу времени летящая молекула. Следовательно, величина z представляет собой

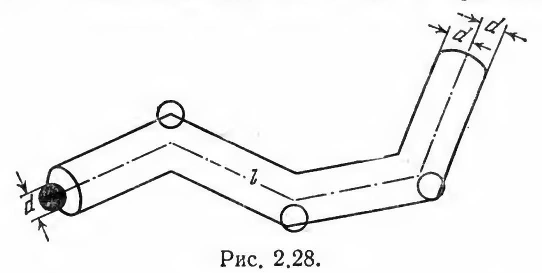


Рис. 2.28.

среднее число столкновений, испытываемых каждой молекулой за единицу времени.

Умножая число молекул n, находящихся в единице объема, на число столкновений z, испытываемых каждой из них за единицу времени, мы должны получить полное число столкновений молекул Z, происходящих в единице объема за единицу времени. Однако при таком методе подсчета мы каждое столкновение, в котором всегда участвуют две молекулы, сосчитаем два раза. Следовательно, Z должно быть равно

$$Z = \frac{zn}{2} = \frac{1}{2} \pi d^2 \overline{c_{\text{отн}}} n^2. \tag{25.12}$$

Переходя от относительного к абсолютному движению, заметим, что путь, проходимый молекулой в пространстве за единицу времени, равен $\bar{c} \cdot 1 = \bar{c}$, и на этом пути она испытывает z столкновений. Следовательно, среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями будет равно

$$l = \frac{\bar{c}}{z} = \frac{\bar{c}}{\pi d^2 n \overline{c_{\text{отн}}}}. \tag{25.13}$$

Замечая, что согласно (25.8) $\frac{\bar{c}}{\bar{c}_{\text{отн}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, получим отсюда окончательное выражение для средней длины свободного пробега:

$$l=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n}. \qquad (25.14)$$

Таким образом, средняя длина свободного пробега l не зависит от температуры газа, так как с ростом T одновременно возрастают и $\bar{c}$ и z, т. е. путь, проходимый молекулой в единицу времени, и число ее столкновений на этом пути.

Диаметры молекул газа составляют обычно $d \approx 2 \div 3 \cdot 10^{-10}$ м, а при нормальных условиях ($p = 1$ атм и $T = 273$ К) число молекул газа в одном кубическом метре

$$n=\frac{6{,}02\cdot 10^{26}\ \text{кмоль}^{-1}}{22{,}40\ \text{м}^3/\text{кмоль}}=2{,}7\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

Отсюда следует, что при этих условиях

$$l \approx 10^{-7}\ \text{м} \quad \text{и} \quad z=\frac{\bar{c}}{l}\approx 10^{10}\ \text{с}^{-1}.$$

Для различных газов, в зависимости от размеров молекул, величины l и z несколько отличаются друг от друга, как видно из приводимой таблицы (при нормальных температуре и давлении):

Газ	l, м	z, с$^{-1}$	Газ	l, м	z, с$^{-1}$
H_2	$1{,}12\cdot 10^{-7}$	$15{,}1\cdot 10^9$	H_2O	$0{,}42\cdot 10^{-7}$	$14{,}1\cdot 10^9$
N_2	$0{,}6\cdot 10^{-7}$	$7{,}55\cdot 10^9$	CO_2	$0{,}42\cdot 10^{-7}$	$9{,}05\cdot 10^9$
O_2	$0{,}65\cdot 10^{-7}$	$6{,}55\cdot 10^9$			

Как было найдено в § 18, концентрация газа пропорциональна его давлению, т. е.

$$n=\frac{p}{kT}. \qquad (25.15)$$

Подставляя (25.15) в (25.14), получаем:

$$l=\frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi d^2 p}. \qquad (25.16)$$

Следовательно, при постоянной температуре ($T = \text{const}$) по мере разрежения газа, т. е. уменьшения его давления, средняя длина свободного пробега возрастает так, что

$$lp=\text{const}. \qquad (25.17)$$

Опытное определение величины l проще и нагляднее всего осуществить методом молекулярного пучка. Экспериментальная установка для подобного измерения l схематически изображена на рис. 2.29. Раскаленный серебряный шарик S испускает атомы серебра с постоянной интенсивностью. Диафрагма D выделяет пучок молекул серебра, движущихся, например, в направлении оси x. Помещая на некоторое время на пути пучка холодную пластинку $П_1$, можно определить количество осевшего на ней за время t серебра, пропорциональное концентрации n_1 летящих молекул.

Убрав пластинку $П_1$, помещают затем на то же самое время на пути пучка вторую пластинку $П_2$ на расстоянии L от места нахождения первой пластинки. Осадок серебра на этой пластинке пропорционален концентрации n_2 молекул серебра в пучке после прохождения им пути L.

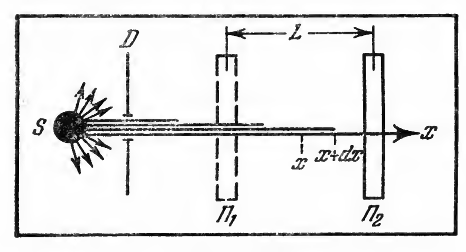


Рис. 2.29.

Если бы в приборе отсутствовал газ, то число молекул, дошедших до каждой из пластинок $П_1$ и $П_2$ и осевших на них, было бы одинаковым. Опыт же показывает, что $n_2/n_1 < 1$. Выделим мысленно слой газа толщины dx между пластинками. Если l — средняя длина свободного пробега молекул, то вероятность столкновения на пути dx будет равна отношению dx/l. Из n летящих молекул некоторая доля $|dn|$ испытывает столкновения с молекулами газа в слое dx и рассеивается в стороны. Число молекул в пучке $n + dn$ после прохождения слоя dx будет меньше, чем n (т. е. $dn < 0$). Относительная доля $-dn/n$ молекул пучка, рассеявшихся в стороны на этом участке вследствие столкновений, равна вероятности столкновения, т. е.

$$\frac{-dn}{n} = \frac{dx}{l} \quad \text{или} \quad \frac{dn}{n} = -\frac{dx}{l}. \tag{25.18}$$

Мы видим, что по мере увеличения пути, проходимого пучком молекул, в арифметической прогрессии, число молекул в этом пучке будет убывать в геометрической прогрессии. Применяя тот же способ расчета, что и при выводе барометрической формулы, можно получить, что

$$\ln\frac{n_2}{n_1} = -\frac{L}{l}, \quad \text{или} \quad n_2 = n_1 e^{-\frac{L}{l}}. \tag{25.19}$$

Измеряя отношение n_2/n_1 по осадку серебра на обеих пластинках, можно найти среднюю длину свободного пробега:

$$l = \frac{L}{\ln(n_1/n_2)}. \tag{25.20}$$

Измерения, произведенные при давлении газа в сосуде $p = 5{,}8 \cdot 10^{-4}$ см рт. ст., дали значение $l = 1{,}7$ см.

Отсюда согласно (25.17) при атмосферном давлении $p_0 = 76$ см рт. ст. длина свободного пробега атома серебра составит:

$$l_0 = 1{,}7 \frac{5{,}8 \cdot 10^{-4}}{76} = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 1{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

что хорошо согласуется с общей оценкой порядка величины l_0 и с данными приведенной таблицы, полученными другими способами.

§ 26. Вакуум. Методы его получения и измерения

Согласно (25.17) средняя длина свободного пробега молекул в газе обратно пропорциональна давлению:

$$l \sim \frac{1}{p}. \tag{26.1}$$

Поместим газ в сосуд с линейными размерами L, например, ~ 10 см, и начнем постепенно его откачивать. При этом средняя длина свободного пробега будет непрерывно возрастать. Если при атмосферном давлении ($p = 760$ мм рт. ст.) l порядка 10^{-7} м, то при уменьшении давления до 1 мм рт. ст. l возрастет примерно в 1000 раз и достигнет значения около 10^{-4} м $= 0{,}1$ мм.

При уменьшении давления еще в 1000 раз, до 10^{-3} мм рт. ст., длина свободного пробега возрастет до 10 см и станет равной по порядку величины линейным размерам обычных сосудов. При дальнейшем уменьшении давления вычислять l по формуле (25.16) было бы неправильно, так как молекулы раньше сталкиваются со стенками сосуда, чем с другими молекулами, и расстояние между двумя последовательными столкновениями молекулы просто равно L.

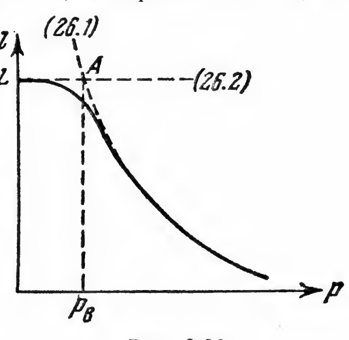


Рис. 2.30.

Зависимость l от p изображена на рис. 2.30. При $l < L$ мы имеем гиперболическую зависимость (26.1), а по достижении достаточно низкого давления $p_в$ длина свободного пробега становится постоянной и равной

$$l = L. \tag{26.2}$$

Точка A лежит на пересечении предельных линий, соответствующих формулам (26.1) и (26.2). В окрестностях этой точки истинная кривая представляет собой плавный переход от одной из этих линий к другой.

При давлениях, меньших $p_в$, столкновения молекул внутри сосуда практически прекращаются и каждая молекула летает от стенки до стенки и обратно, как если бы в сосуде отсутствовали другие молекулы. Эта область давлений называется физическим вакуумом. В рассмотренном выше примере вакуум наступает при давлении 10^{-3} мм рт. ст., т. е. примерно при 10^{-6} атм. При этом в каждом кубическом сантиметре остается еще

$$n = \frac{2,7 \cdot 10^{19}}{10^6} = 2,7 \cdot 10^{13},$$

т. е. огромное число молекул. Однако благодаря ничтожно малым размерам молекул они пролетают весь объем, почти не сталкиваясь друг с другом.

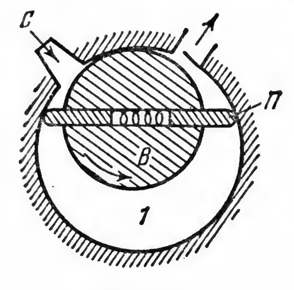


Рис. 2.31.

Из изложенного следует, что понятие вакуума *относительно*. Чем больше размер сосуда, тем при меньших давлениях наступает состояние вакуума. И наоборот, для газа, заключенного в пористых телах (кирпич и другие строительные материалы) с диаметрами пор меньше 0,1 мкм = 10^{-7} м, уже атмосферное давление можно считать вакуумом, так как молекулы газа будут проходить сквозь эти поры, ударяясь о стенки последних и практически не сталкиваясь с другими молекулами.

Свойства вакуума играют большую роль и в технике. Например, в электронных лампах и многочисленных современных электронных приборах движутся направленные пучки электронов. Для того чтобы движущиеся электроны не сталкивались с молекулами газа и не рассеивались в стороны и назад, нет необходимости в абсолютном удалении всего воздуха из прибора. Для этого достаточно довести разрежение в приборе до условия $l > L$, т. е. попасть в область вакуума.

Для создания разрежения применяют различного типа вакуумные насосы. В ротационном вакуум-насосе, схематически изображенном на рис. 2.31, внутри цилиндра вращается эксцентрично посаженный вал B. В прорези на валу вставлены пластины $П$, прижимаемые пружинами к стенкам цилиндра. При вращении вала воздух, поступающий из откачиваемого сосуда C в полость *1*, отсекается пластиной, сжимается и выбрасывается наружу. Герметизация и отделение области низкого давления от атмосферы осуществляется с помощью смазки. С помощью такого типа насосов удается понизить давление лишь до $\sim$0,003—0,008 мм рт. ст. Они используются для создания предварительного вакуума и называются форвакуумными.

Для создания более глубокого вакуума широко применяется насос Лэнгмюра (рис. 2.32). Ртуть или органическая жидкость (масло) в резервуаре нагревается электрической спиралью до кипения. Пары ртути с большой скоростью выходят из сопла и увлекают за собой молекулы воздуха из откачиваемого сосуда. Эти пары, попадая затем на охлаждаемую водой поверхность, конденсируются и стекают обратно в резервуар, а захваченный воздух выходит в пространство, в котором должно быть создано предварительное разрежение (форвакуум).

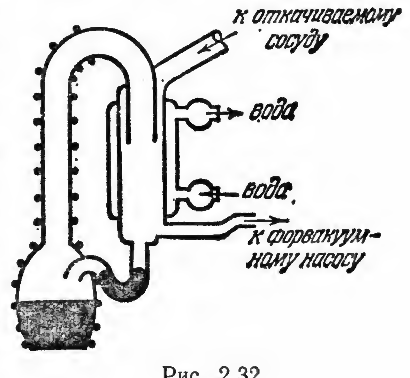


Рис. 2.32.

Насос Лэнгмюра используется, например, для откачки электровакуумных приборов. С его помощью можно достичь разрежений, соответствующих $\sim 10^{-6}$ мм рт. ст.

Для достижения еще больших разрежений используют, например, свойство охлажденного активированного угля поглощать газы. В откачиваемой колбе делается отросток, в который помещается некоторое количество активированного угля. При получении максимального разрежения, которого можно достигнуть с помощью насоса Лэнгмюра, отросток с углем погружают в жидкий воздух. Охлажденный до температуры порядка —180 °С уголь поглощает остатки газа в колбе, и давление в ней понижается до $10^{-8} \div 10^{-9}$ мм рт. ст.

Для измерения небольших разрежений можно пользоваться обычным ртутным манометром. В случае глубокого вакуума приходится предварительно сжимать часть газа в определенное большое число раз и измерять давление сжатой части газа (манометр Мак-Леода).

В настоящее время для измерения вакуума широко используются различные электрические методы. Например, в ионизационном манометре с помощью высокого напряжения ионизируют молекулы остаточного газа и измеряют число образовавшихся ионов, которое пропорционально концентрации молекул, т. е. давлению газа.

§ 27. Диффузия газов

Пусть в газе присутствует посторонняя примесь с концентрацией n (n — число молекул в единице объема). В данный момент времени концентрация примеси в различных точках объема может быть различной и зависеть от пространственной координаты x, как это изображено на рис. 2.33.

Если в точке с координатой x концентрация имеет величину n, то в соседней точке, сдвинутой на расстояние Δx, значение концентрации будет равно $n+\Delta n$. Приращение концентрации Δn может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от концентрации примеси в соседних элементах объема.

Отношение $\frac{\Delta n}{\Delta x}$ характеризует быстроту изменения концентрации в пространстве и называется **градиентом концентрации**. Знак этого отношения указывает направление возрастания концентрации, т. е. направление градиента в пространстве *). Численное значение градиента показывает изменение концентрации Δn в пространстве при перемещении на единицу длины (при $\Delta x = 1$).

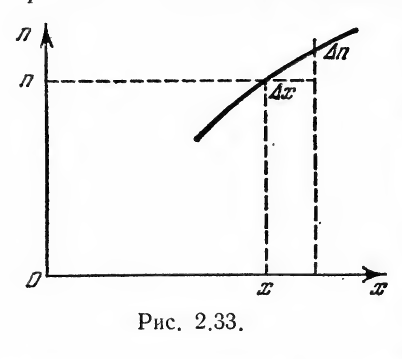


Рис. 2.33.

Если градиент концентрации равен нулю, то $\Delta n = 0$ и $n = \text{const}$, т. е. концентрация примеси в различных точках газа одинакова. Такое равномерное распределение примеси в пространстве является наиболее вероятным и, однажды возникнув, не будет нарушаться хаотическим движением молекул.

При наличии градиента концентрации $\left(\frac{\Delta n}{\Delta x} \neq 0\right)$ хаотическое движение будет стремиться выравнять концентрации, и возникнет поток молекул примеси, направленный от мест с бо́льшими к местам с меньшими значениями n. Этот диффузионный поток будет тем больше, чем выше градиент концентрации.

Для вычисления диффузионного потока выделим мысленно в плоскости $x = \text{const}$ контрольную площадку ΔS перпендикулярно к оси x и подсчитаем число молекул примеси, проходящих за время Δt через эту площадку слева направо и справа налево (рис. 2.34).

Поток молекул ΔN_+, проходящих через площадку в направлении положительной оси x, согласно (17.11) равен

$$\Delta N_+ = \frac{1}{6} n_1 \bar{c}\, \Delta S\, \Delta t, \qquad (27.1)$$

где n_1 — концентрация примеси слева от контрольной площадки.

*) Если концентрация n зависит и от других пространственных координат y и z, то $\Delta n/\Delta x$ является лишь проекцией градиента на ось x. В этом общем случае градиент есть вектор, направленный в сторону наибольшего изменения данной величины.

Поскольку в рассматриваемом случае концентрация n меняется от точки к точке, то следует более тщательно определить, какому значению координаты соответствует величина n_1. Для упрощения расчета примем, что все молекулы, проходящие через контрольную площадку, испытали последнее столкновение на одном и том же расстоянии от площадки, равном средней длине свободного пробега l. Так как выравнивание концентраций происходит лишь в результате взаимных столкновений, то на пути l концентрация молекул в пучке не меняется и остается равной значению n_1 в плоскости $x - l$.

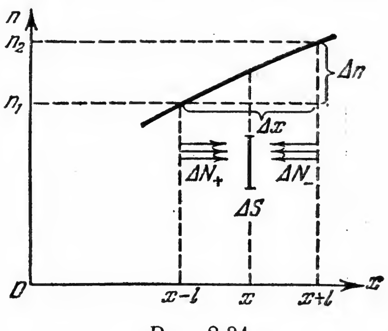


Рис. 2.34.

Поток молекул примеси, проходящих через площадку справа налево, в направлении отрицательных значений координаты x, аналогично равен

$$\Delta N_- = \frac{1}{6} n_2 \bar{c}\, \Delta S\, \Delta t, \qquad (27.2)$$

где n_2 — концентрация примеси в плоскости $x + l$ на расстоянии l справа от площадки.

Суммарный диффузионный поток через площадку в направлении положительной оси x представляет разность этих двух потоков:

$$\Delta N = \Delta N_+ - \Delta N_-. \qquad (27.3)$$

Поток молекул, проходящих через единицу площади за единицу времени, можно тогда преобразовать к виду

$$J = \frac{\Delta N}{\Delta S\, \Delta t} = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\, \bar{c} = -\frac{1}{3}\bar{c}\, l\, \frac{n_2 - n_1}{2l}. \qquad (27.4)$$

Разность $n_2 - n_1$ представляет собой приращение концентрации Δn на расстоянии $\Delta x = 2l$. Следовательно, отношение

$$\frac{n_2 - n_1}{2l} = \frac{\Delta n}{\Delta x} \qquad (27.5)$$

представляет собой градиент концентрации в направлении, параллельном оси x. Обозначим, далее, через D произведение

$$\frac{1}{3}\bar{c}\, l = D. \qquad (27.6)$$

Тогда закон диффузии принимает окончательный вид:

$$J = -D\frac{\Delta n}{\Delta x}. \qquad (27.7)$$

Поток молекул примеси, диффундирующих через единицу площади за единицу времени, прямо пропорционален градиенту концентрации.

Знак минус в формуле (27.7) указывает на то, что диффузионный поток направлен противоположно градиенту концентрации, т. е. в сторону *уменьшения* концентрации.

Коэффициент пропорциональности D носит название **коэффициента диффузии** и численно равен потоку молекул через единицу площади за единицу времени при градиенте концентрации, равном единице (точнее, при $\frac{\Delta n}{\Delta x} = -1$).

Закон диффузии (27.7) был установлен на опыте задолго до того, как он был выведен теоретически из молекулярно-кинетической теории. Поэтому главная ценность теоретического вывода заключается в выяснении механизма процесса диффузии и связи коэффициента диффузии с основными микроскопическими характеристиками.

При нормальных условиях длина свободного пробега $l \approx 10^{-7}$ м, а средние скорости $\bar{c} \approx 10^2 \div 10^3$ м/с. Отсюда, в соответствии с опытом, коэффициенты диффузии в газах при нормальных температуре и давлении оказываются равными $D \approx 10^{-5} \div 10^{-4}$ м²/с.

§ 28. Вязкость газа (внутреннее трение)

Пусть в покоящемся газе движется вверх (перпендикулярно к оси x) плоская пластина, обладающая некоторой скоростью v_0 (рис. 2.35). Будем считать, что v_0 много меньше средней скорости хаотического движения молекул:

$$v_0 \ll c. \qquad (28.1)$$

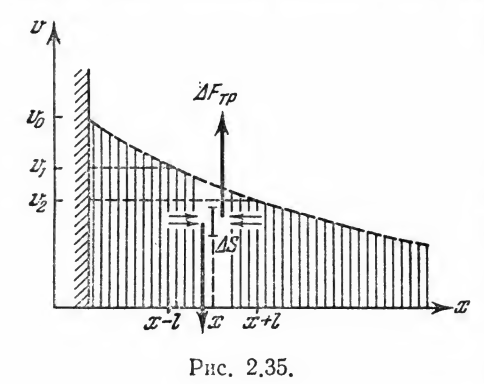


Рис. 2.35.

В своем движении пластина увлекает прилегающий к ней слой газа, который в свою очередь увлекает за собой следующий слой, и т. д. Таким образом, весь газ как бы делится на тончайшие слои, скользящие вверх тем медленнее, чем дальше они находятся от движущегося тела.

Очевидно, что если бы отсутствовало взаимодействие между слоями газа и между газом и пластиной, каждый слой мог бы двигаться с произвольной скоростью, независимо от других. В действительности же распределение скоростей $v(x)$ слоев газа в зависимости от их расстояния до пластины устанавливается в силу наличия вязкости, т. е. сил внутреннего трения в газе.

Вектор **v** представляет собой скорость направленного движения всего слоя газа в целом. При этом каждая молекула газа в слое принимает участие в двух движениях — хаотическом (тепловом) и направленном (коллективном). Скорость теплового движения **c** по абсолютной величине очень велика, так что

$$\bar{c} \gg v. \tag{28.2}$$

Однако направление **c** непрерывно и хаотически меняется так, что вектор скорости **c** в среднем равен нулю:

$$\bar{\mathbf{c}} = 0, \tag{28.3}$$

т. е. совокупность непрерывно сталкивающихся молекул, участвующих только в тепловом движении, в среднем будет оставаться на месте. При наличии же дополнительного направленного движения вся совокупность молекул в целом будет дрейфовать с постоянной скоростью **v**. Таким образом, *среднее* количество движения отдельной молекулы в данном слое

$$\overline{m\mathbf{v} + m\mathbf{c}} = m\mathbf{v} + 0 = m\mathbf{v}. \tag{28.4}$$

Вследствие того, что молекулы участвуют в тепловом движении, они будут быстро переходить из слоя в слой. При этом они будут переносить с собой добавочное количество движения, отвечающее скорости направленного движения **v** того слоя, который они покидают. Это добавочное количество движения будет передаваться молекулам слоя, в который перешла рассматриваемая молекула. Перемешивание молекул разных слоев, происходящее в силу их хаотического движения, приводит к выравниванию скоростей переносного движения **v** разных слоев, что и проявляется макроскопически как действие сил трения между слоями.

Для вывода количественных закономерностей этого процесса рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, контрольную площадку ΔS, перпендикулярную к оси x и расположенную на произвольном расстоянии x от движущейся пластины (рис. 2.35). Через эту площадку за время Δt вправо и влево проходят потоки молекул

$$\Delta N_+ = \frac{1}{6} n\bar{c}\,\Delta S\,\Delta t \quad \text{и} \quad \Delta N_- = \frac{1}{6} n\bar{c}\,\Delta S\,\Delta t. \tag{28.5}$$

Поскольку давление и температура во всем газе одинаковы, то n и $\bar{c}$ одинаковы по всему объему и $\Delta N_+ = \Delta N_-$. Однако, хотя число молекул, проходящих через площадку в обе стороны и *одинаково,* но они переносят разные количества движения. В результате этого переноса количества движения возникает сила трения между соседними слоями, величину которой можно подсчитать, пользуясь законом количества движения.

Каждая молекула, проходящая через площадку ΔS слева направо, переносит с собой в среднем количество движения mv_1, где v_1 —

скорость направленного движения газа в плоскости $x - l$ на расстоянии длины свободного пробега от контрольной площадки. Таким образом, уменьшение количества движения слоя, ограниченного справа площадкой ΔS, за время Δt будет равно

$$mv_1 \Delta N_+ = mv_1 \frac{1}{6} n\bar{c} \Delta S \Delta t.$$

С другой стороны, за то же время через площадку ΔS переносится в обратном направлении количество движения

$$mv_2 \Delta N_- = mv_2 \frac{1}{6} n\bar{c} \Delta S \Delta t,$$

где v_2 — скорость направленного движения газа в плоскости $x + l$, в которой последний раз перед прохождением через контрольную площадку молекулы сталкивались между собой и выравнивали свои средние скорости. Разность $mv_1\Delta N_+ - mv_2\Delta N_-$ представляет собой изменение количества движения слоя и должна быть равна импульсу силы трения $\Delta F_{тр}$, действующей в течение этого времени в направлении $\mathbf{v}$, параллельном площадке ΔS, т. е.

$$\Delta F_{тр} \Delta t = \frac{1}{6} n\bar{c}m (v_1 - v_2) \Delta S \Delta t. \qquad (28.6)$$

Разделив обе части равенства на $\Delta S\ \Delta t$, найдем выражение для силы трения, действующей на единицу площади границы соприкосновения соседних слоев:

$$f_{тр} = \frac{\Delta F_{тр}}{\Delta S} = -\frac{1}{3} nm\bar{c}l \frac{v_2 - v_1}{2l}. \qquad (28.7)$$

Разность $v_2 - v_1$ представляет собой приращение скорости Δv на расстоянии $\Delta x = 2l$. Следовательно, отношение

$$\frac{v_2 - v_1}{2l} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

представляет собой г р а д и е н т с к о р о с т и движения газа. Вводя далее обозначение

$$\frac{1}{3} l\bar{c}nm = \eta, \qquad (28.8)$$

получим окончательное выражение для силы трения:

$$f_{тр} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x}. \qquad (28.9)$$

Сила внутреннего трения, возникающего при макроскопических движениях в газе, *прямо пропорциональна градиенту скорости.* Коэффициент пропорциональности η носит название к о э ф ф и ц и е н т а в н у т р е н н е г о т р е н и я, или просто в я з к о с т и г а з а. Вязкость (или д и н а м и ч е с к а я вязкость)

η численно равна силе внутреннего трения, действующей на единицу площади границы раздела параллельно движущихся слоев газа, когда скорость их движения уменьшается на единицу при перемещении в направлении, перпендикулярном к границе, на единицу длины, т. е.

$$\eta = f_{\text{тр}} \quad \text{при} \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} = -1.$$

Закон (28.9) был получен Ньютоном из анализа экспериментальных данных и явился основой при изучении движения вязкой жидкости и газа. Этим же законом определяется и сила трения, возникающая на границе между газом и движущимся в этом газе твердым телом.

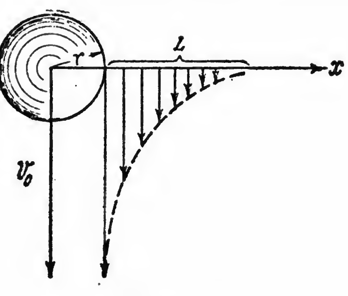


Рис. 2.36.

Рассмотрим для примера равномерное движение маленького шарика радиуса r в газе. Обозначим скорость шарика относительно газа через v_0. Распределение скоростей в соседних слоях газа, увлекаемых шариком, должно иметь вид, изображенный на рис. 2.36. В непосредственной близости к поверхности шара эта скорость v равна v_0, а по мере удаления уменьшается и практически становится равной нулю на некотором расстоянии L от поверхности.

Очевидно, что чем больше радиус шара, тем бóльшая масса газа вовлекается им в движение, и L должно быть пропорционально r:

$$L = \alpha r. \tag{28.10}$$

Величина коэффициента пропорциональности в (28.10), вообще говоря, несколько различна для передней и задней частей движущегося тела, и под α мы будем понимать среднее значение этого коэффициента. Тогда среднее значение градиента скорости по поверхности шара равно

$$\overline{\frac{\Delta v}{\Delta x}} = \frac{v_0 - 0}{\alpha r} = \frac{v_0}{\alpha r}. \tag{28.11}$$

Поверхность шара $S = 4\pi r^2$, и полная сила трения, испытываемая движущимся шаром, равна

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{тр}} S = -\eta \overline{\frac{\Delta v}{\Delta x}} S = -\eta \frac{v_0}{\alpha r} \cdot 4\pi r^2 = -\frac{4\pi}{\alpha} \eta r v_0. \tag{28.12}$$

Интегрирование уравнений движения вязкой жидкости (газа), проведенное Стоксом, дало для шара значение $\alpha = {}^2/_3$. Следова-

тельно, сила сопротивления, испытываемая шаром, движущимся в вязком газе, прямо пропорциональна вязкости газа η, радиусу шара r и скорости его движения v_0:

$$F_{\text{тр}} = -6\pi\eta r v_0. \tag{28.13}$$

Формула (28.13) носит название закона Стокса.

Для нешарообразных тел численное значение α не равно $^2/_3$ и зависит от формы движущегося тела, в качестве r для этих тел следует принять средний определяющий размер. Величина силы сопротивления движению таких тел в газе отличается от выведенной по закону Стокса лишь численным значением коэффициента пропорциональности.

Формула Стокса применима лишь в случае тел достаточно малых размеров и малых скоростей их движения. При больших скоростях вокруг движущихся тел возникают сложные вихревые движения газа, и сила сопротивления возрастает пропорционально квадрату скорости (v^2), а не первой ее степени, как это следует из формул (28.12) и (28.13).

По формуле Стокса можно, например, определить скорости оседания частиц тумана и дыма. Ею можно пользоваться и для решения обратной задачи — измеряя скорость падения шарика в жидкости, можно определить ее вязкость.

§ 29. Теплопроводность газа

Рассмотрим газ, заключенный между двумя параллельными стенками, имеющими различные температуры $T_а$ и $T_б$. Проведем ось x перпендикулярно к стенкам (рис. 2.37). Температура промежуточных слоев газа $T(x)$ будет функцией координаты x.

Рис. 2.37.

При наличии градиента температур $\left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \neq 0\right)$ через газ в направлении оси x будет идти поток тепла. Механизм переноса тепла состоит в следующем: молекулы в разных слоях газа обладают различной средней кинетической энергией, обусловленной различием температур слоев. В силу хаотичности своего движения молекулы будут непрерывно переходить из слоя в слой, перенося в новый слой энергию, присущую покидаемому ими слою. Таким образом, движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различные $\bar{\varepsilon}$, т. е. с макроскопической точки зрения, к потоку тепла.

При подсчете потока тепла мы введем следующие упрощения:

1) будем считать, что молекулы в близких слоях газа, обладающие различными значениями средних энергий $\bar{\varepsilon}$, имеют, тем не менее, одинаковую среднюю скорость;

2) примем, что концентрация молекул n одинакова в соседних слоях газа, хотя при наличии разности температур и одинаковом давлении она должна, конечно, меняться от слоя к слою.

Эти приближения, частично компенсируя друг друга, весьма упростят вычисления, привнося при этом погрешность порядка 10%.

Рассмотрим, как и в предыдущих параграфах, контрольную площадку ΔS, перпендикулярную к оси x (рис. 2.37). За время Δt через эту площадку проходят слева направо $\Delta N_+ = \frac{1}{6}\bar{c}n\,\Delta S\,\Delta t$ молекул. Средняя энергия этих молекул $\bar{\varepsilon}_1$ соответствует значению ε в том месте, где они последний раз испытали столкновение, т. е. на расстоянии длины свободного пробега l от площадки ΔS. Обозначив значение температуры в плоскости $x - l$ через T_1 и ограничиваясь случаем одноатомного идеального газа, мы можем написать, что

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{3}{2}kT_1. \qquad (29.1)$$

Число молекул, проходящих через площадку ΔS за время Δt справа налево, $\Delta N_- = \frac{1}{6}\bar{c}n\,\Delta S\,\Delta t$. Средняя энергия этих молекул

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{3}{2}kT_2, \qquad (29.2)$$

где T_2 — значение температуры в плоскости $x + l$.

Полный поток энергии ΔQ, проходящий через площадку в положительном направлении оси x, равен разности двух противоположных потоков $\Delta Q = \bar{\varepsilon}_1\,\Delta N_+ - \bar{\varepsilon}_2\,\Delta N_- = \frac{1}{6}n\bar{c}\,(T_1 - T_2)\frac{3}{2}k\,\Delta S\,\Delta t$, откуда

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta S\,\Delta t} = -\frac{1}{3}n\bar{c}l\,\frac{T_2 - T_1}{2l}\,\frac{3}{2}k. \qquad (29.3)$$

Разность $T_2 - T_1$ представляет собой изменение температуры ΔT на расстоянии $\Delta x = 2l$. Следовательно, отношение

$$\frac{T_2 - T_1}{2l} = \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

есть не что иное, как г р а д и е н т т е м п е р а т у р ы.

Введя далее обозначение

$$\frac{1}{3}l\bar{c}\cdot\frac{3}{2}kn = \lambda, \qquad (29.4)$$

мы получим окончательное выражение закона теплопроводности:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \qquad (29.5)$$

Поток тепла, проходящий через единицу площади за единицу времени, прямо пропорционален градиенту температуры.

Коэффициент пропорциональности λ носит название коэффициента теплопроводности или, просто, теплопроводности газа. Теплопроводность газа численно равна количеству тепла, проходящему через единицу площади соприкасающихся слоев за единицу времени при градиенте температуры, равном единице. Знак минус указывает, что поток тепла направлен в сторону уменьшения температуры.

Средняя энергия всех n молекул, заключенных в единице объема, равна

$$E_v = n \cdot \frac{3}{2} kT. \qquad (29.6)$$

Если нагреть газ на один градус так, чтобы число его молекул в единице объема оставалось постоянным, т. е. при неизменном объеме, то эта энергия увеличится до

$$E'_v = n \cdot \frac{3}{2} k (T+1). \qquad (29.6')$$

Возрастание внутренней энергии при таком процессе

$$E'_v - E_v = n \cdot \frac{3}{2} k \qquad (29.7)$$

представляет собой количество тепла, необходимое для нагревания единицы объема газа на один градус при постоянном объеме, т. е. теплоемкость этой единицы объема. Обозначим через $C_{уд}$ удельную теплоемкость газа, т. е. количество тепла, необходимое для нагревания единицы массы газа на один градус. Поскольку масса единицы объема газа равна его плотности ρ, то

$$E'_v - E_v = \rho C_{уд}. \qquad (29.8)$$

Таким образом, теплоемкость единицы объема одноатомного идеального газа

$$\rho C_{уд} = \frac{3}{2} kn \qquad (29.9)$$

и коэффициент теплопроводности этого газа

$$\lambda = \frac{1}{3} l \bar{c} \rho C_{уд}. \qquad (29.10)$$

Как мы увидим ниже, в гл. VIII, в случае многоатомных газов выражения (29.1) для средней энергии одной молекулы, (29.6)

для средней энергии единицы объема и (29.9) для теплоемкости этой единицы объема перестают быть справедливыми и должны быть заменены другими. Однако можно показать, что окончательная связь (29.10) между теплопроводностью и теплоемкостью газа остается справедливой и для многоатомных газов; это подтверждается и опытом.

В соответствии с (25.14) длина свободного пробега l обратно пропорциональна концентрации молекул n, а диаметры молекул для различных газов имеют близкий порядок $d = (2—3) \cdot 10^{-10}$ м. Поэтому теплопроводности различных газов примерно пропорциональны средним скоростям $\bar{c}$, т.е. обратно пропорциональны корням квадратным из их молекулярных весов, и наивысшая теплопроводность — у водорода.

§ 30. Коэффициенты переноса и их зависимость от давления

Сопоставим полученные в предыдущих параграфах выражения для законов:

диффузии

$$J = -D\frac{\Delta n}{\Delta x}, \tag{30.1}$$

внутреннего трения

$$f_{\text{тр}} = -\eta\frac{\Delta v}{\Delta x} \tag{30.2}$$

и теплопроводности

$$q = -\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x}. \tag{30.3}$$

Все эти законы были установлены на опыте задолго до их обоснования и вывода из молекулярно-кинетической теории.

Последняя позволила установить, что внешнее сходство математических выражений этих законов обусловлено общностью лежащего в основе явлений диффузии, теплопроводности и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Однако к концу XIX века, несмотря на блестящие успехи молекулярно-кинетической теории в объяснении целого ряда явлений, как уже указывалось, ей еще недоставало твердой опоры — прямых экспериментальных доказательств существования атомов и молекул. Это обстоятельство давало возможность идеалистической школе Маха и Оствальда оспаривать правомочность выводов молекулярно-кинетической теории. С точки зрения этой идеалистической школы сходство законов (30.1) — (30.3) вызвано не объективными причинами, а субъективными — удобством и математической простотой описания связи между нашими ощущениями.

Если бы это действительно было так, то коэффициенты пропорциональности в законах (30.1) — (30.3) были бы произвольными и не связанными между собой. В противоположность этому из кинетической теории вытекает однозначная связь между ними, обусловленная единством внутреннего объективного механизма явлений.

Сопоставим выведенные нами в предыдущих параграфах выражения для коэффициентов:

диффузии

$$D=\frac{1}{3}l\bar{c}, \tag{30.4}$$

внутреннего трения

$$\eta=\frac{1}{3}l\bar{c}nm \tag{30.5}$$

и теплопроводности

$$\lambda=\frac{1}{3}l\bar{c}\rho C_{\text{уд}}. \tag{30.6}$$

Здесь m — масса отдельной молекулы, а n — число молекул в единице объема. Следовательно, их произведение $nm=\rho$ есть плотность газа, и из (30.4) и (30.5) вытекает:

$$\eta=D\rho. \tag{30.7}$$

Из (30.4) и (30.6) следует второе соотношение

$$\lambda=D\rho C_{\text{уд}}, \tag{30.8}$$

также связывающее непосредственно наблюдаемые на опыте величины.

Эти выводы молекулярно-кинетической теории хорошо оправдываются на опыте и подтверждают ее положение об общности молекулярного механизма, лежащего в основе явлений диффузии, теплопроводности и внутреннего трения.

Учет более тонких эффектов, связанных с тем, что произведения средних величин не точно равны средним значениям произведений, еще более улучшает совпадение количественных предсказаний с опытом.

Из анализа соотношений (30.4) — (30.8) вытекает также целый ряд теоретически и практически важных выводов. Остановимся лишь на зависимости коэффициентов переноса (30.4) — (30.6) от давления.

Так как средняя скорость молекул $\bar{c}$ пропорциональна $\sqrt{T}$ (см. § 20) и не зависит от давления, то $D\sim l$, и зависимость коэффициента диффузии от давления должна быть подобна зависимости l от p, рассмотренной в § 26 и изображенной на рис. 2.30:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при обычных давлениях } D\sim\dfrac{1}{p},\\ \text{в области вакуума } D=\text{const}.\end{array}\right\} \tag{30.9}$$

То, что коэффициент диффузии при обычных давлениях обратно пропорционален давлению, вполне естественно. С ростом давления уменьшается длина свободного пробега молекул и затрудняется их диффузия.

При постоянной температуре плотность газа ρ пропорциональна его давлению p. Поэтому из (30.7) следует, что

$$\left.\begin{array}{l}\text{при обычных давлениях } D\sim\frac{1}{p},\ \rho\sim p \text{ и } \eta=\text{const},\\ \text{в области вакуума } D=\text{const},\ \rho\sim p \text{ и } \eta\sim p.\end{array}\right\} \quad (30.10)$$

С увеличением давления и плотности газа повышается число молекул, переносящих количество движения из слоя в слой, но зато уменьшается расстояние, на которое оно переносится до столкновений с соседними молекулами. Вследствие этого

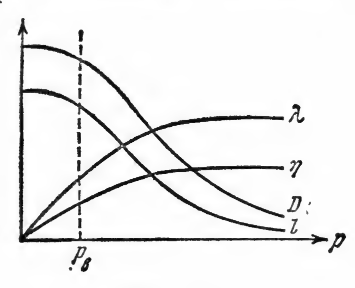


Рис. 2.38.

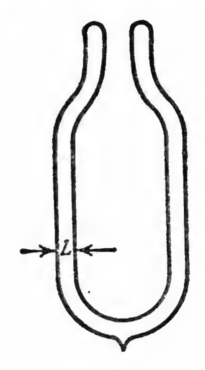


Рис. 2.39.

вязкость газа не должна зависеть от его давления. Этот теоретический вывод показался сомнительным самому получившему его Максвеллу, который убедился в его правильности лишь после экспериментальной проверки. Опыт показал, что даже при тысячекратном изменении давления величина η почти не меняется.

В области вакуума расстояние, на которое переносится импульс молекулами, остается неизменным и равным расстоянию между стенками или движущимися в вакууме телами. При этом вязкость газа пропорциональна числу молекул и с уменьшением давления падает прямо пропорционально последнему.

Поскольку удельная теплоемкость газа $C_{уд}$ — величина постоянная, то теплопроводность газа будет себя вести так же, как и вязкость:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при обычных давлениях } \lambda=\text{const},\\ \text{в области вакуума } \lambda\sim p.\end{array}\right\} \quad (30.11)$$

Зависимости (30.9) — (30.11) коэффициентов переноса от давления изображены графически на рис. 2.38. Для сравнения на

том же рисунке приведена кривая зависимости l от p, изображенная ранее на рис. 2.30.

Зависимости η и λ от p в области вакуума могут быть использованы для измерения очень низких давлений. В так называемом манометре Пирани нить, помещенная в вакуум, накаливается электрическим током. При этом, чем ниже давление, тем меньше теплопроводность газа, тем слабее охлаждается нить и выше ее температура. Проградуировав температуру нити при разных давлениях, можно таким образом, измеряя температуру нити, определить давление газа.

В термосах и сосудах Дьюара делают двойные стенки и из пространства между ними откачивают воздух (рис. 2.39). Если откачать воздух лишь до давлений $p > p_в$, то согласно (30.11) теплопроводность воздуха останется той же, как и при атмосферном давлении. И только при $p \ll p_в$ (глубокий вакуум) теплопроводность воздуха между стенками начинает падать и он становится хорошим теплоизолятором.

ГЛАВА VIII

ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 31. Работа и теплота. Первое начало термодинамики

Еще более 200 лет тому назад М. В. Ломоносов в работе «Размышления о причине теплоты и холода» писал:

«Так как тела могут двигаться двояким движением — *общим,* при котором все тело непрерывно меняет свое место при покоящихся друг относительно друга частях, и *внутренним,* которое есть перемена места нечувствительных частиц материи, и так как при самом быстром общем движении часто не наблюдается теплоты, а при отсутствии такового движения наблюдается большая теплота, то очевидно, что *теплота состоит во внутреннем движении материи*».

Рис. 2.40.

Этим двум разным типам движения соответствуют различные формы энергии. Тело, движущееся как целое, например, с поступательной скоростью **v**, обладает механической энергией $E_{\text{мех}} = {}^1/_2\ Mv^2$. При таком направленном движении все молекулы тела получают одну и ту же скорость **v** (рис. 2.40), и энергия механического движения $E_{\text{мех}}$ распределяется между молекулами одним-единственным способом — в данном случае равномерно. В более общем случае в механическую энергию следует включать и потенциальную энергию тела во внешнем поле (гравитационном, электрическом, магнитном).

Наряду с механической энергией направленного движения тело обладает внутренней энергией хаотического теплового движения, при котором скорости отдельных молекул и расстояния между ними различны и непрерывно изменяются (рис. 2.41). Величина внутренней энергии тела складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии их взаимного расположения

$$U = E_{\text{кин}} + E_{\text{вз}}. \qquad (31.1)$$

Для идеального одноатомного газа, состоящего из N молекул, $E_{вз} = 0$ и, как было показано в § 18,

$$U = N \cdot \frac{3}{2} kT,$$

т. е. энергия молекулярного движения газа определяет его температуру. В отличие от механической энергии энергия теплового движения распределяется между отдельными молекулами хаотически, большим числом непрерывно сменяющих друг друга способов (т. е. одно макросостояние реализуется множеством непрерывно чередующихся микросостояний, см. § 16 и 17).

Эта совокупность непрерывно сменяющих друг друга микросостояний, отличающихся лишь внутренним перераспределением энергии между молекулами, характеризует определенное макроскопическое состояние всего тела в целом с определенной температурой T, объемом V и давлением p.

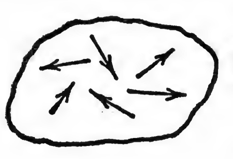


Рис. 2.41.

Величины T, V и p являются параметрами, характеризующими макроскопическое состояние всего тела. В случае твердых тел вместо объема параметром является совокупность его линейных размеров. При помещении тела во внешние поля к этим параметрам добавляются характеристики этих полей, например высота поднятия тела над землей или напряженность электрических и магнитных полей.

При данном состоянии всего тела (под телом мы при этом понимаем как твердые тела, так и заключенные в сосудах жидкость и газ) оно обладает вполне определенными значениями механической $E_{мех}$ и внутренней U энергий. Если привести в соприкосновение два тела, то в процессе взаимодействия они смогут обмениваться энергией как в той, так и в другой форме. Этот обмен различными формами энергии характеризуется соответственно понятиями совершенной работы A и переданного тепла Q.

Например, вода, падающая на лопатки турбины, вращает последнюю. При этом оба эти тела обмениваются механической энергией. Механическая энергия, отданная водой, передается турбине в форме также механической энергии направленного движения турбины. При этом количество переданной механической энергии мы измеряем совершенной работой.

Таким образом, в этом случае *работа есть мера переданной другому телу или телам механической энергии.*

Следует твердо помнить, что *работа сама по себе не есть какая-либо особая форма энергии.*

В приведенном примере механическая энергия воды *непосредственно* превращается в механическую энергию турбины в процессе работы воды.

Энергией могут обладать лишь реальные материальные тела. В отрыве от материальных тел энергия существовать не может. Совершая *работу* над телом, мы меняем его *энергию*. Значит, можно говорить о запасе механической *энергии* тела, но не о запасе *работы* в этом теле.

Когда топочные газы обогревают паровой котел, они охлаждаются. При этом уменьшается интенсивность теплового движения молекул этих газов и тем самым их внутренняя энергия. В свою очередь вода в котле нагревается — возрастает энергия теплового движения молекул воды. При этом оба тела (газ и вода) *обмениваются* энергией своих внутренних тепловых движений. *Величину переданной энергии теплового движения молекул мы измеряем количеством теплоты.*

Следовательно, *теплота, так же как и работа, не является особой формой энергии. Тепло есть мера переданной телу или отданной им энергии хаотического молекулярного движения.* Поэтому *неправильной является встречающаяся иногда формулировка о «запасе тепла в теле».*

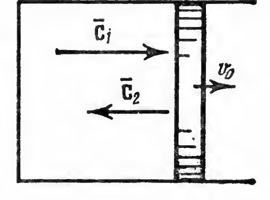


Рис. 2.42.

Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения и обратно. Камень, падающий на землю, в момент удара отдает всю накопленную им кинетическую энергию, за счет чего оба тела нагреваются. При этом происходит переход механической энергии направленного поступательного движения камня в энергию хаотического теплового движения атомов обоих тел в строго эквивалентных количествах.

В качестве обратного примера можно рассмотреть расширяющийся газ, заключенный в сосуд с поршнем. Молекулы газа, движущиеся со средними скоростями $\bar{c}_1$, ударяются о поршень, движущийся вправо с некоторой скоростью v_0 (рис. 2.42). При этом по законам соударений упругих тел (см. § 8, гл. II) они отлетают назад с меньшей скоростью:

$$\bar{c}_2 = \bar{c}_1 - 2v_0. \tag{31.2}$$

Таким образом, в процессе расширения газа его внутренняя энергия уменьшается вследствие превращения в механическую энергию движущегося поршня.

Можно без труда найти множество примеров превращения одной формы энергии в другую. Опыт показывает, что во всех приведенных и в других многочисленных примерах превращение механической энергии в тепловую и обратно совершается всегда в строго эквивалентных количествах. Поскольку тепловое движение есть, в конечном счете, тоже механическое движение отдельных молекул (только не направленное, а хаотическое), то при всех этих превращениях должен соблюдаться закон сохранения энергии с учетом энергии

не только внешних, но и внутренних движений. Такая общая формулировка этого закона носит название **первого начала термодинамики**.

Рассмотрим тело, в целом неподвижное (например, газ в цилиндре с подвижным поршнем), чтобы можно было пренебречь энергией его механического движения. Внутреннюю энергию теплового движения этого тела обозначим через U.

Дадим возможность телу обмениваться энергией с окружающими телами. При этом внутренняя энергия тела изменится на некоторую величину ΔU, которая в зависимости от обстоятельств может оказаться как положительной, так и отрицательной.

В процессе взаимодействия с рассматриваемым телом изменится интенсивность теплового движения молекул окружающих тел: эти тела охладятся или нагреются и, тем самым, передадут рассматриваемому телу некоторое количество теплоты ΔQ. Знак величины ΔQ будет указывать направление процесса теплообмена. Если окружающие тела будут нагреваться и отнимать от рассматриваемого тела энергию, то $\Delta Q < 0$.

При изменении внутренней энергии изменится состояние тела, оно будет расширяться или сжиматься и приведет в механическое движение окружающие его тела. Количество переданной окружающим телам энергии механического движения мы будем характеризовать *работой ΔA, совершенной рассматриваемым телом над окружающими его телами*. Работа ΔA также является величиной алгебраической и имеет знак. Если механическая энергия окружающих тел уменьшится, то $\Delta A < 0$, и мы говорим, что *окружающая среда совершила работу* — ΔA.

Подчеркнем принятое нами и чаще всего применяемое правило знаков. *ΔQ считается положительным, если тепло передается от окружающей среды данному телу,* т. е. за счет притока тепла ΔQ извне внутренняя энергия тела возрастает. Наоборот, *ΔA считается положительной, если тело производит механическую работу над окружающими телами,* т. е. за счет произведенной механической работы убывает внутренняя энергия тела.

Учитывая процессы теплообмена и совершения механической работы и правило знаков, мы можем окончательно записать закон сохранения энергии в виде

$$\boxed{\Delta U = \Delta Q - \Delta A.} \qquad (31.3)$$

Изменение внутренней энергии тела ΔU равно разности сообщенного телу количества теплоты ΔQ и произведенной телом механической работы ΔA *).

---

*) По поводу смысла символов Δ для работы и тепла см. примечание на стр. 35.

Закон (31.3) можно переписать и в таком виде:

$$\boxed{\Delta Q = \Delta U + \Delta A.} \qquad (31.4)$$

Это и есть обычная математическая формулировка первого начала термодинамики:

Количество теплоты, сообщенное телу (ΔQ), *идет на увеличение его внутренней энергии* (ΔU) *и на совершение телом работы* (ΔA).

§ 32. Теплоемкость газа. Физический смысл универсальной газовой постоянной

Теплоемкость тела характеризуется количеством теплоты, необходимым для нагревания этого тела на один градус (кельвин), и измеряется в джоулях на градус (Дж/К) *). Если для увеличения температуры тела на ΔT градусов необходимо сообщить ему ΔQ джоулей, то средняя теплоемкость тела в интервале ΔT определяется как

$$C_{\text{тела}} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \qquad (32.1)$$

Теплоемкость тела пропорциональна массе и зависит от вещества тела. Удельная теплоемкость $C_{\text{уд}}$ данного вещества (дерева, железа, бензина, воздуха и т. д.) характеризуется количеством теплоты, необходимым для нагревания 1 кг данного вещества на один градус, и измеряется в Дж/(кг·К). Удельная теплоемкость обычно слабо меняется с изменением температуры.

Для газов удобно пользоваться молярной теплоемкостью ($C_{\text{мол}}$ или просто C), характеризующейся количеством теплоты, нужным для нагревания одного киломоля данного вещества на один градус.

Очевидно, что

$$C_{\text{уд}}\,(\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)})\cdot\mu\,(\text{кг/кмоль}) = C\,(\text{Дж/(кмоль}\cdot\text{К)}). \qquad (32.2)$$

Поскольку в 1 киломоле любого газа содержится одинаковое число молекул, а средняя кинетическая энергия молекул не зависит от их массы, то можно ожидать, что молярные теплоемкости всех достаточно разреженных газов должны быть одинаковыми или по крайней мере подчиняться одинаковым закономерностям.

Теплоемкость тела существенно зависит от того, как меняется состояние тела в процессе нагревания. Рассмотрим для простоты идеальный одноатомный газ. Если мы будем нагревать газ, заключенный в замкнутом объеме, $V = \text{const}$ (рис. 2.43, *а*), то все под-

---

*) См. примечание на стр. 79.

водимое тепло ΔQ будет идти только на увеличение внутренней энергии газа. Тогда в (31.4) $\Delta A = 0$ и, следовательно,

$$\Delta Q = \Delta U.$$

При этом температура газа будет возрастать в соответствии с увеличением его внутренней энергии [см. (18.17)], откуда следует, что температура идеального газа пропорциональна его внутренней энергии. Давление газа p также будет возрастать пропорционально температуре. Обозначим теплоемкость газа при постоянном объеме через C_V.

Если мы хотим, чтобы в процессе нагревания сохранялось давление, газу следует предоставить возможность расширяться. Для этого поместим газ в цилиндр с поршнем, на который действует постоянное давление $p = \text{const}$ (рис. 2.43, *б*). Так как внутренняя энергия U идеального газа не зависит от его объема (18.17), то количество теплоты, необходимое для ее увеличения, останется тем же. Но при нагревании газа до той же температуры часть подводимого тепла расходуется теперь на работу против внешних сил при расширении газа. Следовательно, для нагревания газа до той же температуры, как и в предыдущем случае ($V = \text{const}$), придется затратить большее количество теплоты. Таким образом, теплоемкость $\Delta Q/\Delta T$ газа при постоянном давлении, которую мы обозначим через C_p, будет больше, чем C_V.

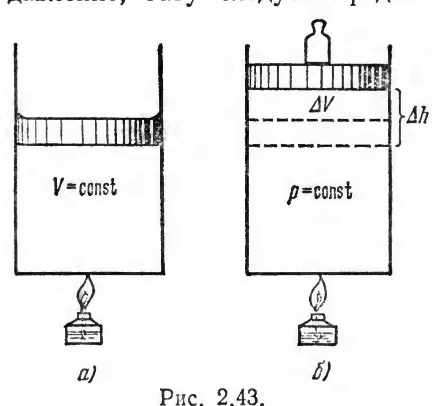


Рис. 2.43.

Рассмотренный пример очень важен. Он показывает, что количество теплоты ΔQ, необходимое для нагревания газа на ΔT К, существенно зависит от дополнительных условий — характера изменения других макроскопических параметров, определяющих состояние газа, т. е. p и V. Кроме рассмотренных процессов, характеризуемых простейшими дополнительными условиями $V = \text{const}$ и $p = \text{const}$, можно рассмотреть и множество других, отвечающих различным изменениям V и p при нагревании. Каждому процессу будет отвечать своя теплоемкость C (см. § 34).

Величины C_p и C_V для идеального газа оказываются связанными простым соотношением. Для вывода этого соотношения рассмотрим сначала 1 кмоль идеального газа, нагреваемый при постоянном объеме (рис. 2.43, *а*). Газ при этом не расширяется и не совершает никакой работы, т. е. $\Delta A = 0$, и уравнение первого начала (31.3) примет вид

$$\Delta Q = \Delta U. \qquad (32.3)$$

Обозначив через ΔT повышение температуры газа в этом процессе, мы получим для теплоемкости этого процесса

$$C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} \qquad (32.4)$$

(для разных конкретных газов C_V, вообще говоря, различна, см. § 33).

Поместим теперь 1 кмоль идеального газа в сосуд, закрытый поршнем, над которым поддерживается постоянное давление $p = \text{const}$ (рис. 243, *б*). Поршень свободно перемещается, и, следовательно, давление в газе будет равно той же величине. Для нагревания этого моля на то же число градусов ΔT придется теперь затратить большее количество тепла

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \qquad (32.5)$$

где ΔA — работа, совершаемая газом при перемещении поршня. Теплоемкость этого процесса определяется из соотношения

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T} = C_V + \frac{\Delta A}{\Delta T}. \qquad (32.6)$$

(Напомним еще раз, что для идеального газа U, а значит, и ΔU не зависит от объема или давления, но есть функция только его температуры; поэтому $\Delta U/\Delta T$ также не зависит от V или p, а характеризует изменение внутренней энергии газа с изменением температуры. Мы нашли эту величину, определяя теплоемкость $\Delta U/\Delta T$ в случае, когда внешняя работа не производится, т. е. $V = \text{const}$, а $\Delta V = 0$, и весь поток тепла идет только на увеличение внутренней энергии газа.)

Обозначим площадь поршня через S. Полная сила, действующая на поршень, $F = pS$. При расширении газа поршень поднимается на некоторую высоту Δh (рис. 2.43), и, следовательно, газ совершит, преодолевая внешнюю силу, работу

$$\Delta A = F\,\Delta h = pS\,\Delta h = p\,\Delta V, \qquad (32.7)$$

где $\Delta V = S\Delta h$ — увеличение объема газа.

Для идеального газа p, V и T связаны между собой уравнением Менделеева — Клапейрона, которое, для одного киломоля имеет вид

$$pV = RT. \qquad (32.8)$$

После нагревания при $p = \text{const}$ до температуры $T + \Delta T$ газ займет объем $V + \Delta V$. Следовательно,

$$p(V + \Delta V) = R(T + \Delta T). \qquad (32.9)$$

Вычитая почленно (32.8) из (32.9), получим:

$$\Delta A = p\,\Delta V = R\,\Delta T. \qquad (32.10)$$

Таким образом, искомая величина равна

$$\frac{\Delta A}{\Delta T} = \frac{p\,\Delta V}{\Delta T} = R. \qquad (32.11)$$

Соотношение (32.11) дает простую интерпретацию физического смысла универсальной газовой постоянной R:

Универсальная газовая постоянная R численно равна работе расширения киломоля идеального газа при нагревании его на один градус при постоянном давлении.

Подставляя (32.11) в (32.6), получаем:

$$C_p = C_V + R \qquad (32.12)$$

или

$$C_p - C_V = R. \qquad (32.13)$$

Для идеального газа молярная теплоемкость при постоянном давлении превышает молярную теплоемкость при постоянном объеме на величину R, т. е. на 8,31 кДж/(кмоль·К). Это соотношение носит название формулы Майера. Зная разность теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме, выраженную в тепловых единицах, а также работу расширения при нагревании воздуха при постоянном давлении, выраженную в механических единицах, Р. Майер в 1842 г. впервые оценил величину механического эквивалента тепла.

§ 33. Теплоемкости одноатомных и многоатомных газов

Согласно (32.4) теплоемкость идеального газа при постоянном объеме равна приращению его внутренней энергии при нагревании на один градус. Заменяя конечные приращения бесконечно малыми, т. е. дифференциалами, мы перейдем от средней теплоемкости в некотором интервале температур к истинной, соответствующей данной температуре:

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \qquad (33.1)$$

В одном киломоле газа содержится N_0 молекул (где N_0 — число Авогадро). Согласно (18.17) внутренняя энергия киломоля одноатомного газа при температуре T равна

$$U = N_0 \bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = N_0 \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} RT. \qquad (33.2)$$

Следовательно, молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} R = \text{const} \qquad (33.3)$$

должна быть одинаковой для всех достаточно разреженных одноатомных газов; она не зависит от температуры и численно равна приблизительно 12,5 кДж/(кмоль·К). Этот вывод кинетической теории газов очень хорошо оправдывается на опыте для инертных («благородных») газов He, Ne, Ar, Kr и др., а также паров ряда металлов, например Ag.

Однако измерения теплоемкостей основных газов, входящих в состав воздуха N_2, O_2, и ряда других двухатомных газов при комнатных температурах дают большее значение: $C_V \approx 20{,}8$ кДж/(кмоль·К). Еще большее значение $C_V \approx$ $\approx 25{,}0$ кДж/(кмоль·К) наблюдается при комнатной температуре для водяного пара H_2O и других многоатомных газов (NH_3, CH_4 и т. д.).

Эти факты указывают на то, что предположение о возможности рассматривать движущиеся молекулы идеального газа как материальные точки и пренебрегать их протяженностью оказывается с достаточной степенью точности справедливым лишь для одноатомных молекул.

В разделе механики мы ввели понятие о числе степеней свободы материальных тел. Числом степеней свободы тела называется число независимых переменных, определяющих состояние тела. Например, материальная точка в пространстве обладает тремя степенями свободы, так как ее положение задается тремя независимыми координатами x, y, z. В соответствии с этим и средняя кинетическая энергия поступательного движения одноатомного газа может быть разделена на три части

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{3}{2}kT = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{m\overline{u^2}}{2} + \frac{m\overline{v^2}}{2} + \frac{m\overline{w^2}}{2}, \qquad (33.4)$$

соответствующие кинетической энергии трех поступательных степеней свободы этих атомов. Согласно выводам § 17

$$\frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{m\overline{w^2}}{2} = \frac{1}{3}\frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{1}{2}kT, \qquad (33.5)$$

т. е. средняя энергия теплового движения одноатомных молекул равномерно распределяется между тремя степенями свободы их поступательного движения, и *на каждую степень свободы в среднем приходится энергия, равная* $^1/_2\, kT$.

В случае двухатомной молекулы оба составляющих ее атома благодаря имеющимся между ними химическим связям движутся совместно, сохраняя фиксированное расстояние между их центрами r_0. При этом наряду с тремя поступательными степенями свободы движения молекулы как целого возможны еще, при неизменном r_0, вращательные движения молекулы вокруг осей, проходящих через ее центр тяжести, как это схематически изображено на рис. 2.44.

Кинетическая энергия вращения молекулы вокруг одной из осей равна

$$\varepsilon_{\text{вращ}} = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{33.6}$$

где I — момент инерции молекулы относительно оси вращения, а ω — угловая скорость этого вращения. Благодаря трехмерности пространства любое вращение может быть разложено на три независимых вращения вокруг трех взаимно-перпендикулярных осей, изображенных на рис. 2.44. Однако в случае двухатомной молекулы из этих трех степеней свободы вращательного движения осуществляются лишь две, соответствующие вращению вокруг двух осей, перпендикулярных к оси самой молекулы. Дело в том, что эта ось проходит через оба атома так, что их расстояния до оси r_i равны нулю, и момент инерции молекулы относительно этой оси $I_{\text{ось}} = \Sigma m_i r_i^2$ также обращается в нуль. Поэтому вращение молекулы относительно ее собственной оси не изменяет ее положения в пространстве, а согласно (33.6) кинетическая энергия такого вращения равна нулю.

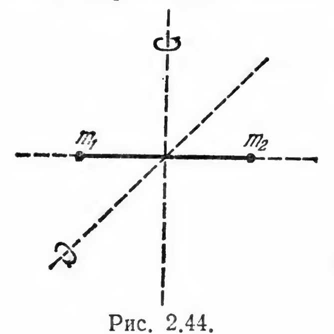


Рис. 2.44.

При взаимных столкновениях молекул возможен обмен их энергиями и превращение энергии вращательного движения одной из них в энергию поступательного движения другой молекулы и обратно. Таким путем *устанавливается равновесие между значениями средних энергий поступательных и вращательных движений молекул.* В каком отношении друг к другу должны находиться средние энергии поступательного и вращательного движения?

В случае не слишком низких температур опыт подтверждает правильность указанного уже положения, известного под названием теоремы Больцмана: *средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы системы, равна* $^1/_2\, kT$.

Распространяя на вращательное движение теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы (33.5), мы должны считать, что

$$\frac{I\overline{\omega^2}}{2} = \frac{1}{2}kT. \tag{33.7}$$

Таким образом, средняя энергия хаотического теплового движения двухатомной молекулы складывается из энергии движений, соответствующих трем поступательным и двум вращательным степеням свободы, и равна

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{пост}} + \bar{\varepsilon}_{\text{вращ}} = 3 \cdot \frac{1}{2}kT + 2 \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}kT. \tag{33.8}$$

Отсюда внутренняя энергия киломоля двухатомного газа равна

$$U=N_0\cdot\frac{5}{2}kT=\frac{5}{2}RT,$$

и его теплоемкость при постоянном объеме составляет

$$C_V=\frac{dU}{dT}=\frac{5}{2}R\approx 20{,}8\ \text{кДж/(кмоль}\cdot\text{К)} \qquad (33.9)$$

в полном соответствии с экспериментальными данными, полученными при комнатной температуре.

Для трехатомной молекулы водяного пара, схематически изображенной на рис. 2.45, все три момента инерции отличны от нуля. Следовательно, такая молекула обладает шестью степенями свободы — тремя поступательными и тремя вращательными, и ее средняя энергия равна

$$\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_{\text{пост}}+\bar{\varepsilon}_{\text{вращ}}=$$
$$=3\cdot\frac{1}{2}kT+3\cdot\frac{1}{2}kT=\frac{6}{2}kT. \qquad (33.10)$$

Рис. 2.45.

Та же картина будет наблюдаться и для многоатомного газа *). Поэтому внутренняя энергия одного киломоля трех- и многоатомных газов

$$U=N_0\cdot\frac{6}{2}kT=\frac{6}{2}RT, \qquad (33.11)$$

а теплоемкость

$$C_V=\frac{6}{2}R\approx 25{,}0\ \text{кДж/(кмоль}\cdot\text{К)}, \qquad (33.12)$$

что также соответствует опытным данным при обычных температурах.

Учет возможности вращательных движений молекул позволил объяснить различие численных значений молярных теплоемкостей одноатомных, двухатомных и многоатомных газов. Приведенные окончательные результаты (33.3), (33.9) и (33.12) показывают, что во всех этих случаях молярные теплоемкости газов должны иметь определенные постоянные значения, не зависящие от температуры. В настоящее время мы имеем возможность как в лабораторных условиях, так и в технике изменять температуры в широких

---

*) В некоторых многоатомных молекулах (например, CO_2) атомы расположены линейно, поэтому такие молекулы, как и двухатомные, имеют только две степени свободы вращательного движения, и их теплоемкость определяется по формуле (33.9).

пределах, от очень низких, близких к абсолютному нулю, до очень высоких, измеряющихся тысячами градусов. Результаты измерений для одно- и двухатомных газов, произведенных в столь широком интервале температур, приведены на рис. 2.46.

Из этого графика видно, что в случае одноатомных газов предсказываемая кинетической теорией формула (33.3) хорошо оправдывается от нескольких градусов абсолютной шкалы до тысяч градусов. Для двухатомных же газов величина C_V непрерывно изменяется с температурой, большей частью медленно и плавно, а в некоторых интервалах очень круто и на большую величину.

При комнатной температуре двухатомный газ обладает пятью степенями свободы и его теплоемкость $C_V = 20{,}8$ кДж/(кмоль·К).

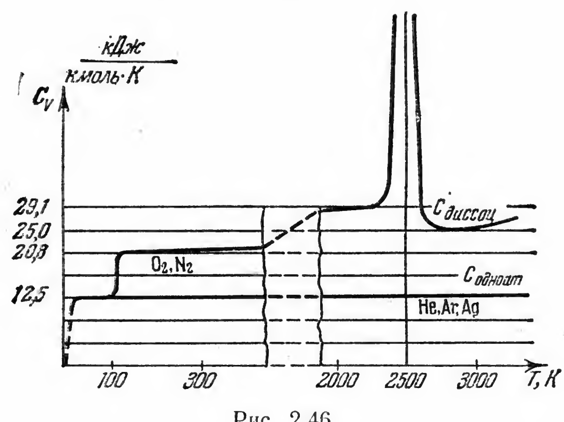


Рис. 2.46.

При температурах жидкого воздуха (около —200 °С, т. е. около 100 К) теплоемкость газа резко падает и при еще более низких температурах остается постоянной и равной $C_V = 12{,}5$ кДж/(кмоль·К), как для одноатомных газов.

Этот факт показывает, что при температурах порядка 100 К (а для водорода при несколько более высокой температуре) по каким-то причинам вращательные степени свободы как бы «вымерзают» и молекулы двухатомного газа движутся только поступательно. При этих температурах, даже при косом ударе, схематически изображенном на рис. 2.47, молекулы лишь обмениваются энергией своих поступательных движений и не начинают вращаться, что противоречит законам классической динамики.

В части I (§ 9 гл. II) мы уже указывали, что законы классической механики установлены на опыте для движений больших тел при скоростях, много меньших скорости света; применение этих законов к движениям микроскопических частиц имеет также свои границы. В томе III, при изучении строения атома, будут вкратце

изложены установленные в XX веке основные законы движения микроскопических частиц — законы квантовой механики. Эти более точные законы объясняют наблюдаемые на опыте явления «вымерзания» или обратного ему «возбуждения» тех или иных степеней свободы.

Здесь мы лишь кратко остановимся на этом объяснении. Классическая физика исходит из предположения, что все физические величины — энергия (потенциальная и кинетическая), количество движения, момент количества движения и другие — способны изменяться лишь *непрерывно*. Квантовая теория показывает, что такое представление неправильно.

Целый ряд физических величин не может меняться непрерывно. Эти величины, изменяясь, принимают *прерывный, «дискретный»* ряд значений, переходя от одного значения к другому *скачком*. Здесь для нас особенно важна эта скачкообразность изменения кинетической энергии вращательного движения $I\omega^2/2$.

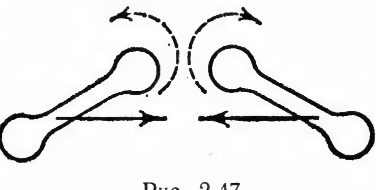


Рис. 2.47.

В частности, чтобы молекула начала вращаться, ей необходимо сообщить некоторую вполне определенную порцию энергии $\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$. Если сообщаемая энергия меньше этой порции, то вращение молекулы возникнуть не сможет. При высоких температурах, когда средняя энергия теплового движения много больше величины $\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$:

$$kT \gg \Delta\varepsilon_{\text{вращ}}, \tag{33.13}$$

все молекулы вращаются с энергиями, близкими к kT. Происходящие при столкновениях скачкообразные изменения энергии вращательного движения отдельных молекул сравнительно невелики и могут считаться в этой области температур бесконечно малыми. Тогда изменения кинетической энергии вращательного движения можно приближенно считать непрерывными, в соответствии с классическими представлениями.

С понижением температуры скачкообразное изменение вращательной энергии становится все более заметным, и при

$$kT < \Delta\varepsilon_{\text{вращ}} \tag{33.14}$$

средняя энергия поступательного движения сталкивающихся молекул становится уже недостаточной для возбуждения вращательного движения даже с самой минимальной (из возможных) угловой скоростью. При столь низких температурах молекулы двухатомного газа практически перестают вращаться и движутся только поступательно, как одноатомный газ. Расчет показывает, что величина $\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$ тем больше, чем меньше момент инерции молекулы. Поэтому

у легкого водорода «вымерзание» вращательных степеней свободы наступает раньше, т. е. при более высоких температурах, чем у других двухатомных газов.

При достаточно низких температурах газы конденсируются и движение их молекул оказывается не поступательным, а колебательным. На характере этого (также квантового) движения мы здесь не останавливаемся, так как речь о нем будет идти в следующих главах (см. ч. III, гл. XII, § 49).

Отметим лишь, что все сказанное относится к атомам и молекулам, но не к электронам, которые движутся в металлах поступательно, сохраняя очень большую энергию поступательного движения даже при абсолютном нуле температуры (эта энергия, как мы покажем позже, имеет нетепловую природу). О свойствах свободно движущихся электронов в металлах будет рассказано в томе II курса.

Мы выяснили, таким образом, качественно причину уменьшения теплоемкости газов с уменьшением температуры. Она состоит, коротко говоря, в том, что *принцип Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы не является универсальным.* Он правилен лишь в тех случаях, когда порция энергии $\Delta\varepsilon$, которая может быть передана соответствующей степени свободы, много меньше $^1/_2\,kT$. Если же T невелико, то степени свободы начинают «вымерзать». Они уже не могут принимать слишком малые для них порции энергии и тогда не принимают участия в распределении полной энергии системы. *Соответственно уменьшению участвующих в приеме энергии степеней свободы уменьшается и теплоемкость.*

Рассмотрим теперь причины изменения теплоемкости при высоких температурах. Каждый атом обладает тремя степенями свободы. Но молекула, состоящая из двух атомов, обладает не шестью, а лишь пятью степенями свободы (три поступательные и две вращательные). Уменьшение числа возможных степеней свободы на единицу обязано предположению, что оба атома в молекуле связаны жестко, находясь на неизменном расстоянии r_0 друг от друга. Фактически, однако, никакой жесткой связи между атомами нет. Силы взаимодействия, связывающие атомы в молекулу, определяют лишь равновесное значение расстояния между ними, изменению которого как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения атомы оказывают противодействие. Эта связь, следовательно, скорее напоминает упругую пружину, и при сообщении молекуле энергии атомы могут начать колебаться вдоль линии связи.

Таким образом, двухатомная молекула имеет шестую степень свободы — внутреннее колебательное движение. Эта степень свободы обладает очень большой энергией возбуждения $\Delta\varepsilon_{\text{колеб}}$ и поэтому при обычных температурах не проявляется. С повышением температуры, при столкновениях отдельных, случайно более богатых энергией молекул некоторые из них будут приходить в колебательное движение в тем большем числе, чем выше температура.

За счет такого постепенного возбуждения колебательной степени свободы теплоемкость двухатомных газов будет увеличиваться с повышением температуры, достигая некоторого предельного значения при $\sim$2000 °С.

В отличие от поступательного и вращательного движений, при которых молекулы обладают только кинетической энергией, при колебательном движении молекул происходит непрерывное превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Поэтому при возбуждении колебательная степень свободы обладает вдвое большей средней энергией, чем каждая из поступательных и вращательных степеней свободы, т. е.

$$\bar{\varepsilon}_{\text{колеб}} = \bar{\varepsilon}_{\text{кин}} + \bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT. \qquad (33.15)$$

Следовательно, при высоких температурах средняя энергия одной двухатомной молекулы станет равна

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{пост}} + \bar{\varepsilon}_{\text{вращ}} + \bar{\varepsilon}_{\text{колеб}} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT + 2 \cdot \frac{1}{2} kT + kT = \frac{7}{2} kT, \qquad (33.16)$$

и теплоемкость двухатомного газа должна быть

$$C_V = \frac{7}{2} R \approx 29{,}1 \text{ кДж/(кмоль} \cdot \text{К)}$$

— в полном соответствии с опытом (рис. 2.46).

При дальнейшем повышении температуры, примерно до 2500 К колебания атомов в молекулах становятся настолько интенсивными, что молекулы разрываются на составляющие их атомы. На подобную *диссоциацию* молекул затрачивается значительная энергия, раз в 10 превышающая среднюю энергию их поступательного движения при этих температурах. Поэтому подводимое к газу тепло лишь в незначительной части будет идти на увеличение скоростей молекул и повышение температуры, а бóльшая часть тепла будет затрачиваться на разрыв внутримолекулярной связи. На кривой зависимости теплоемкости от температуры появляется очень высокий пик, выходящий за пределы рис. 2.46. До тех пор, пока все молекулы не диссоциируют, температура газа практически не будет повышаться, несмотря на подвод тепла.

Это обстоятельство является причиной сравнительно низкой температуры пламен. При теплотах сгорания обычных топлив порядка $\Delta Q \approx 200 \div 400$ Кдж/кмоль и теплоемкости продуктов сгорания, равной 25 кДж/(кмоль·К), следует ожидать, что температура пламени достигнет 10 000 К. Однако уже при 2500 К начинается столь сильная диссоциация продуктов сгорания и резкое повышение теплоемкости, что дальнейшее повышение температуры пламени становится трудно осуществимым.

Возвращаясь к графику рис. 2.46, следует указать, что после полной диссоциации в объеме вместо, например, 1 моля молеку-

лярного кислорода O_2 окажутся 2 моля атомарного кислорода O. Поскольку теплоемкость атомов составляет 12,5 кДж/(кмоль·К), то полная теплоемкость системы в расчете на 1 моль исходного молекулярного (двухатомного) кислорода составит при температурах свыше 2500 К около 25,0 кДж/(кмоль·К).

Поскольку сами атомы не являются в действительности материальными точками, а представляют довольно сложные системы электронов, движущихся вокруг ядер, то при дальнейшем повышении температуры электроны начнут переходить на более высокие энергетические уровни и теплоемкость вновь будет расти за счет возбуждения внутренних степеней свободы атомов. Однако, поскольку порции энергии $\Delta\varepsilon_{эл}$, необходимые для перевода электронов с их нормальных траекторий в атоме на возбужденные, в десятки раз превышают значения $\Delta\varepsilon_{колеб}$ внутримолекулярных колебаний, то при обычных и даже сравнительно высоких температурах (до 2000—3000 К) движение электронов внутри атомов останется неизменным, и эти степени свободы у подавляющего большинства атомов не будут участвовать в распределении энергии при тепловом движении.

Таким образом, *атом при обычных условиях обладает только тремя степенями свободы поступательного движения не потому, что он представляется материальной точкой, а потому, что энергия движения электронов внутри атомов не меняется, пока* $\Delta\varepsilon_{эл} \gg kT$.

В томе III мы увидим, что именно за счет возбуждения весьма малой части атомов газа при температурах порядка 1000 К и выше происходит свечение газа. Полный распад легких атомов на составные части — ядра и свободные электроны — происходит лишь при сверхвысоких температурах порядка $10^6 \div 10^7$ К. Такой порядок имеет температура, развиваемая при взрывах атомных и водородных бомб. В этих условиях, например, молекула O_2 разрывается на 2 ядра и 16 электронов, и совокупность этих 18 частиц, движущихся раздельно, обладает $18\cdot 3 = 54$ степенями свободы поступательного движения.

Но и этой температуры недостаточно для «расщепления» всех атомных ядер, что требует исключительно больших температур, не достигаемых даже в центральных областях звезд.

§ 34. Процессы и циклы с газами и их графическое изображение

Уравнение Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{M}{\mu} RT = \nu RT \tag{34.1}$$

устанавливает связь между тремя основными параметрами p, V и T, характеризующими данную массу газа. Таким образом, из трех

параметров любые два могут рассматриваться как независимые, а третий может быть выражен через них. Выбирая в качестве независимых параметров, определяющих состояние газа, p и V, можно записать температуру в виде

$$T = \frac{1}{\nu R} pV. \tag{34.2}$$

Это позволяет наглядно изображать с помощью графиков состояние газа и происходящие в нем процессы.

Будем откладывать значения объема газа V на оси абсцисс, а значения давления p — на оси ординат (рис. 2.48). Каждому состоянию газа, характеризуемому определенными значениями V и p, отвечает на этом графике точка с координатами (V, p). И обратно, точка I на этом графике изображает состояние газа со значениями объема $V = V_1$ и давления $p = p_1$. Соответствующая этому состоянию температура $T = T_1$ определится по уравнению (34.2).

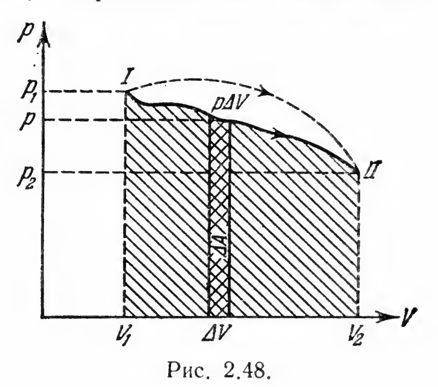


Рис. 2.48.

При изменении состояния газа величины p и V (и связанная с ними температура T) будут непрерывно меняться, а изображающая состояния точка в pV-диаграмме будет перемещаться вдоль некоторой кривой. Сплошная кривая между точками I и II полностью отражает произведенный процесс изменения состояния газа.

С помощью pV-диаграммы легко вычислить работу, совершенную газом при данном процессе. Рассмотрим достаточно малый интервал изменения состояния, когда объем газа изменяется от произвольного значения V до значения $V + \Delta V$. При малом изменении объема ΔV давление можно считать практически постоянным и равным p. Согласно (32.7) элементарная работа, совершенная газом при расширении на величину ΔV, равна

$$\Delta A = p\,\Delta V. \tag{34.3}$$

Из рис. 2.48 видно, что величина ΔA численно равна площади полоски, заштрихованной на этом графике двойной штриховкой. Разбивая полное изменение объема от V_1 до V_2 на ряд последовательных приращений ΔV, мы найдем полную работу, совершенную газом в течение данного процесса, как сумму площадей таких полосок:

$$A_{\mathrm{I,\,II}} = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} p \cdot \Delta V. \tag{34.4}$$

В пределе эта работа изобразится полной площадью, заключенной между кривой, изображающей процесс, осью абсцисс и двумя ординатами, восставленными в конечных точках V_1 и V_2. Эта площадь на рис. 2.48 показана простой штриховкой.

Условие постоянства давления p при малом изменении объема ΔV будет соблюдаться тем лучше, чем меньше величина ΔV, что хорошо видно из графика. Значение искомой работы $A_{\text{I, II}}$ будет вычислено тем точней, чем меньше ΔV, т. е. чем больше полосок помещается между V_1 и V_2. Точное значение $A_{\text{I, II}}$ мы получим, переходя к пределу бесконечно большого числа бесконечно тонких полосок. Такая сумма записывается символически в виде определенного интеграла:

$$A_{\text{I, II}} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV. \tag{34.5}$$

Если мы переведем газ из того же начального состояния (V_1, p_1) в то же конечное состояние (V_2, p_2) через другой ряд промежуточных состояний, то этот новый процесс в pV-диаграмме изобразится другой линией, соединяющей те же точки I и II. На рис. 2.48 такой процесс изображен пунктирной линией.

Как видно из рисунка, площадь, ограниченная сверху пунктирной кривой и численно равная работе $A'_{\text{I, II}}$, при втором процессе отличается от площади, ограниченной первой кривой: $A'_{\text{I, II}} \neq A_{\text{I, II}}$. Таким образом, работа, совершаемая газом при изменении его состояния, зависит не только от его начального и конечного состояний, но и от пути перехода из одного в другое. Это еще раз подтверждает приведенное в § 31 разъяснение, что бессмысленно говорить о «запасе работы», заключенной в теле. Переводя газ из состояния I в состояние II, можно получить самую различную работу, в зависимости от способа («пути») перехода.

Этот вывод нисколько не противоречит закону сохранения энергии — первому началу термодинамики (31.3), — поскольку при различных процессах газ не только совершает различную механическую работу, но и получает от окружающих тел различные количества теплоты. Для пояснения этого обстоятельства разберем детальнее несколько простейших процессов с газами, представляющих также и технический интерес.

1. Изохорический процесс. Так называется процесс, при котором объем газа остается постоянным ($V = \text{const}$), а меняются лишь его давление p и температура T. Этот процесс осуществляется при нагревании газа в замкнутом объеме.

Изохорический процесс на pV-диаграмме изображается вертикальной прямой, параллельной оси p (рис. 2.49).

Так как $V = \text{const}$, то $\Delta V = 0$ и

$$\Delta A = p\,\Delta V = 0, \tag{34.6}$$

т. е. при изохорическом процессе газ не совершает механической работы. Для этого случая уравнение первого начала (31.3) принимает вид

$$\Delta Q = \Delta U, \tag{34.7}$$

т. е. *все сообщаемое газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии*. Молярная теплоемкость при изохорическом процессе равна

$$C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T}. \tag{34.8}$$

Численные значения этой теплоемкости для одно-, двух- и многоатомных газов были приведены в предыдущем параграфе.

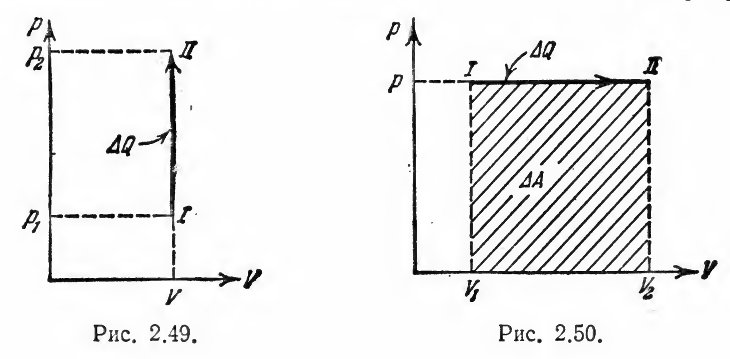


Рис. 2.49. Рис. 2.50.

2. Изобарический процесс. Так называется процесс, проходящий при постоянном давлении (p = const). Он разбирался ранее в § 32. На pV-диаграмме этот процесс изображается горизонтальной прямой, параллельной оси V (рис. 2.50). Работа при изобарическом расширении изображается на этом графике площадью прямоугольника

$$\Delta A = p\,\Delta V = p\,(V_2 - V_1). \tag{34.9}$$

Применим к рассматриваемому процессу первое начало:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \tag{34.10}$$

Подводимое к газу тепло частично тратится на увеличение его внутренней энергии (на нагревание), а частично — на совершение работы. Молярная теплоемкость при изобарическом процессе равна

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T}. \tag{34.11}$$

Но величина $\Delta U/\Delta T$ от вида процесса не зависит, поскольку внутренняя энергия идеального газа U не зависит ни от p, ни от V, а определяется только величиной T. Следовательно, изменение внутренней энергии идеального газа с изменением температуры

$\Delta U/\Delta T$ одинаково при любых процессах, и мы можем, в соответствии с (32.4), заменить в (34.11) $\Delta U/\Delta T$ на C_V:

$$C_p = C_V + \frac{p\,\Delta V}{\Delta T}.$$

Как было доказано в § 32, для идеального газа

$$C_p = C_V + \frac{p\,\Delta V}{\Delta T} = C_V + R. \qquad (34.12)$$

При изобарическом сжатии направление процесса меняется на обратное, и работа, совершенная газом, становится отрицательной ($\Delta A < 0$). Это означает, что не газ совершает внешнюю работу, а, напротив, внешние силы совершают положительную работу $\Delta A'$ по сжатию газа, т. е.

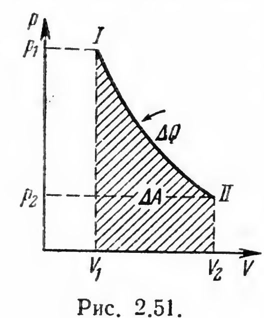


Рис. 2.51.

$$\Delta A' = -\Delta A. \qquad (34.13)$$

Величины ΔU и ΔQ при этом также отрицательны, т. е. внутренняя энергия газа уменьшается за счет отдачи им тепла окружающим телам.

3. Изотермический процесс. Так называется процесс, проводимый при постоянной температуре газа ($T = \text{const}$). Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что при этом

$$pV = \text{const}. \qquad (34.14)$$

Значение постоянной можно определить, подставив значения p и V для любой, например начальной или конечной, точки процесса:

$$pV = p_1V_1. \qquad (34.14a)$$

Это уравнение изображается на графике гиперболой (рис. 2.51). Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, то при изотермическом расширении $U = \text{const}$ и $\Delta U = 0$. Следовательно, согласно первому началу

$$\Delta Q = \Delta A. \qquad (34.15)$$

Подводимое к газу при изотермическом расширении тепло целиком превращается в работу расширения. Элементарная работа при бесконечно малом расширении может быть, на основании (34.14а) и (32.8), определена и приведена к виду

$$p\,dV = p_1V_1\frac{dV}{V} = RT\,d(\ln V) = d\,[RT\ln V].$$

Переходя к конечным приращениям, получаем

$$\Delta A = \Delta\,[RT\ln V] = RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (34.16)$$

Теплоемкость при изотермическом расширении определяется формально по общему соотношению и равна

$$C_T = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta Q}{0} = \infty.$$

Бесконечная теплоемкость не является физическим абсурдом. Она означает, что подводимое к газу тепло не приводит к изменению его температуры в силу того, что все оно идет на совершение газом внешней работы. При расширении $\Delta Q > 0$ и $C_T = +\infty$, при сжатии $\Delta Q < 0$ и $C_T = -\infty$.

При изотермическом процессе увеличение внутренней энергии газа за счет притока тепла целиком компенсируется уменьшением внутренней энергии вследствие произведенной газом работы расширения. Таким образом, внутренняя энергия газа остается неизменной.

Осуществление изотермического процесса при температуре T предполагает существование — при той же температуре — внешней среды, обладающей неизмеримо бо́льшим запасом внутренней энергии, чем внутренняя энергия рабочего газа. Тогда малая потеря энергии внешней средой не приведет к заметному уменьшению ее температуры. Расширение рабочего газа должно происходить *бесконечно медленно*, чтобы его температура в каждый момент успевала выравниваться с температурой окружающей среды. Практически всегда можно указать предельную скорость реального процесса, при которой процесс будет достаточно близок к изотермическому.

4. Адиабатический процесс. Если сосуд с расширяющимся газом теплоизолировать от окружающей среды, то теплообмен будет отсутствовать, т. е. $\Delta Q = 0$. Процесс, происходящий при соблюдении этого условия, называется адиабатическим.

Уравнение первого начала при учете условия $\Delta Q = 0$ принимает вид

$$0 = \Delta U + \Delta A \quad \text{или} \quad \Delta A = -\Delta U. \qquad (34.17)$$

Следовательно, *при адиабатическом процессе работа совершается только за счет внутренней энергии газа.* При адиабатическом расширении газ совершает работу, а его внутренняя энергия и, следовательно, температура падают. При адиабатическом сжатии работа газа отрицательна (внешняя среда производит работу над газом), внутренняя энергия и температура газа возрастают.

Адиабатический процесс можно реализовать практически и при отсутствии хорошей теплоизоляции. Но тогда необходимо вести процесс столь *быстро*, чтобы за время его осуществления не произошел сколько-нибудь существенный теплообмен с внешней средой.

Теплоемкость при адиабатическом процессе

$$C_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{0}{\Delta T} = 0. \qquad (34.18)$$

Выведем уравнение кривой, изображающей адиабатический процесс на pV-диаграмме. Уравнение состояния моля газа имеет вид

$$pV = RT. \qquad (34.19)$$

При бесконечно малом изменении состояния совершаемая работа $\Delta A \to p\,dV$, а изменение внутренней энергии, согласно (33.1), $\Delta U \to C_V dT$. Подставляя эти значения ΔA и ΔU в уравнение первого начала (34.17), получим:

$$C_V dT + p\,dV = 0. \qquad (34.20)$$

Это есть уравнение адиабаты в дифференциальной форме. Поскольку оно содержит все три параметра — p, V и T, — то для исключения одного из них воспользуемся уравнением состояния (34.19), предварительно продифференцировав его:

$$p\,dV + V\,dp = R\,dT. \qquad (34.21)$$

Умножая уравнение (34.20) на R, а (34.21) — на C_V и складывая их, получим:

$$(C_V + R)\,p\,dV + C_V V\,dp = 0. \qquad (34.22)$$

Принимая во внимание, что для идеального газа $C_V + R = C_p$, разделим уравнение (34.22) на произведение $C_V pV$ и введем обозначение

$$\gamma = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} > 1. \qquad (34.23)$$

Тогда (34.22) примет вид

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \qquad (34.24)$$

Учитывая, что постоянный множитель γ можно внести под знак дифференциала, преобразуем (34.24) к виду

$$d\,[\gamma \ln V + \ln p] = 0. \qquad (34.25)$$

Отсюда следует, что величина, стоящая в скобках, должна быть постоянной. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим эту константу через ln const. Тогда

$$\gamma \ln V + \ln p = \ln \mathrm{const}. \qquad (34.26)$$

Учитывая, что $\gamma \ln V = \ln V^\gamma$ и потенцируя выражение (34.26), получим:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (34.27)$$

Это и есть уравнение адиабаты.

Поскольку $\gamma > 1$, то кривая, изображаемая этим уравнением (рис. 2.52), идет круче изотермы (34.14), которая для сравнения показана на том же чертеже штрих-пунктиром. Видно, что при адиабатическом *расширении* из точки *I* кривая (34.27) опускается ниже изотермы, т. е. газ *охлаждается*, а при адиабатическом *сжатии* кривая (34.27) поднимается выше изотермы, т. е. газ *нагревается*. Величина работы адиабатического процесса может быть особенно просто вычислена с помощью уравнения (34.17):

$$\Delta A = -C_V \Delta T = -C_V (T_2 - T_1) = C_V (T_1 - T_2). \quad (34.28)$$

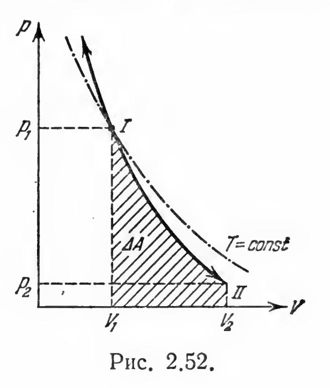


Рис. 2.52.

Для нахождения же конечной температуры T_2 можно, комбинируя (34.19) и (34.27), получить соотношение

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (34.29)$$

Для одноатомного газа $C_V = 12{,}5$ кДж/(кмоль·К), $C_p = C_V + R = 20{,}8$ кДж/(кмоль·К), и показатель степени адиабаты равен $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{20{,}8}{12{,}5} \approx 1{,}67$. Для двухатомных газов при обычных температурах $\gamma = \frac{29{,}1}{20{,}8} \approx 1{,}4$. Для многоатомных газов при возбуждении их колебательных степеней свободы теплоемкости C_p и C_V имеют еще бо́льшие значения и показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \quad (34.30)$$

еще ближе к единице.

В быстроходных двигателях внутреннего сгорания и при истечении газов через сопла реактивных двигателей процесс расширения газа протекает настолько быстро, что его можно считать практически адиабатическим и рассчитывать по уравнению (34.27).

Разобранные нами изохорический, изобарический, изотермический и адиабатический процессы являются простейшими примерами бесчисленного многообразия процессов изменения состояния газа. Из этих примеров, в частности, видно, что теплоемкость газа существенно зависит от характера процесса изменения его состояния и может принимать любые значения от $+\infty$ для изотермического

расширения ($\Delta Q > 0$) до $-\infty$ для изотермического сжатия ($\Delta Q < 0$, и при $\Delta T = 0$ $C_T = -\infty$).

В теплоэнергетике широко применяются совокупности процессов, образующие замкнутые циклы, как это изображено на рис. 2.53. При этом на участке расширения *123* газ совершает положительную работу, изображаемую вертикально заштрихованной площадью, а на участке сжатия *341* — отрицательную работу, которой соответствует площадь, показанная горизонтальной штриховкой. Полная работа ΔA, совершенная газом за один цикл, будет равна разности этих площадей, т. е. площади, ограничиваемой кривой *12341*.

Поскольку газ в результате цикла возвращается в исходное состояние *1*, его внутренняя энергия в начале и в конце процесса одинакова и полное изменение внутренней энергии газа за цикл $\Delta U = 0$. Из формулировки первого начала тогда следует, что

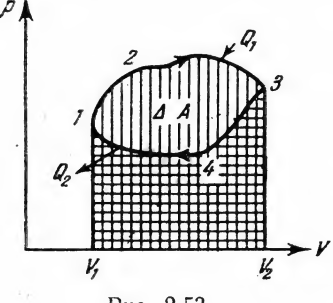


Рис. 2.53.

$$\Delta Q = \Delta A, \qquad (34.31)$$

т. е. в результате каждого цикла происходит преобразование некоторого количества теплоты в работу или наоборот.

Более детальный анализ показывает, что на одних участках цикла газ получает от более горячих окружающих тел некоторое количество теплоты Q_1, а на других участках отдает часть этого тепла Q_2 другим, более холодным окружающим телам. Лишь за счет части тепла

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2, \qquad (34.32)$$

отнятого от более горячих тел, совершается работа, так что

$$\Delta A = Q_1 - Q_2. \qquad (34.33)$$

Отношение совершенной за цикл механической работы к теплу, отнятому от горячего тела,

$$\frac{\Delta A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \eta \qquad (34.34)$$

носит название коэффициента полезного действия цикла. Вопрос о выборе цикла с большим к. п. д. и о максимальных возможных значениях к. п. д. подробно разбирается в курсах технической термодинамики (см. также § 37).

ГЛАВА IX

ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 35. Обратимые и необратимые процессы

В § 15, рассматривая молекулярное движение, мы подчеркивали отличия последнего от чисто механического движения тела как целого. Эти отличия приводят, в частности, к тому, что тепловые процессы в противоположность механическим (при отсутствии трения, приводящего к выделению тепла) могут быть необратимыми. Рассмотрим сейчас этот вопрос несколько подробнее.

Чисто механические процессы всегда обратимы. Рассмотрим движение материальной точки по наклонной плоскости под действием силы тяжести (рис. 2.54). В положении A материальная точка имела скорость $\mathbf{v}_A$, а опустившись в положение $Б$ (разность высот точек A и $Б$ равна h), она приобретает скорость $\mathbf{v}_Б$ (рис. 2.54, *а*). Величина $v_Б$ может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_Б^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh. \qquad (35.1)$$

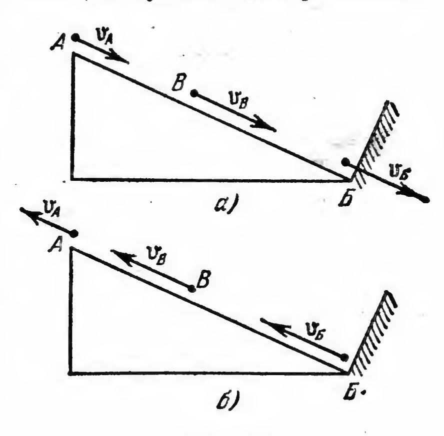


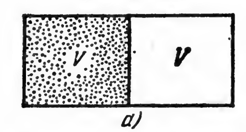
Рис. 2.54.

Установим в точке $Б$ абсолютно упругую плоскую стенку (рис. 2.54, *б*). Ударившись об эту стенку, материальная точка изменит свою скорость на обратную и со скоростью $-\mathbf{v}_Б$ начнет подниматься обратно. Применяя вновь закон сохранения энергии (35.1), мы найдем, что в положении A материальная точка будет двигаться со скоростью $-\mathbf{v}_A$, равной по величине и обратной по направлению своему первоначальному значению $\mathbf{v}_A$ в той же точке. Аналогичное обращение направления скорости будет и в любой

промежуточной точке B. При возвращении материальной точки в исходное положение ее потенциальная энергия принимает первоначальное значение mgh и, следовательно, во всей системе не происходит никаких изменений, кроме изменения знака скоростей. Любое ч и с т о м е х а н и ч е с к о е движение больших и малых тел как с малыми, так и с большими скоростями всегда в п о л н е о б р а т и м о. Это можно доказать в общем виде и совершенно строго, исходя из уравнений движения механики.

При наличии теплового движения наблюдаются, как правило, процессы н е о б р а т и м ы е.

Когда пуля в результате трения о воздух теряет скорость, т. е. происходит превращение механической энергии в тепло (пуля и воздух нагреваются), нельзя «повернуть» процесс, так, чтобы рассеянное тепло превратилось опять в энергию механического движения пули.



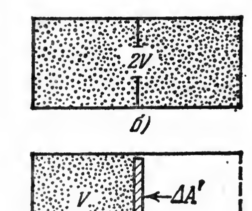


Рис. 2.55.

Кинетическая энергия движения пули как целого будет в результате столкновений молекул воздуха с пулей переходить в добавочную энергию хаотического движения молекул воздуха и пули. Рассмотренным выше механизмом теплопроводности эта энергия постепенно распределится между все бо́льшим числом молекул. Обратный переход энергии невозможен, т. е. процесс необратим.

Говоря о необратимости того или иного процесса, мы не имеем в виду его «непосредственную» необратимость. Вопрос ставится шире: *нельзя ли с помощью каких-либо процессов или механизмов добиться того, чтобы участвовавшие в них тела можно было вернуть в исходное состояние без того, чтобы в природе возникли какие-либо другие изменения*? Для выяснения этого вопроса рассмотрим два важнейших типа необратимых процессов: расширение газа в пустоту и теплообмен между двумя телами.

1. Возьмем сосуд, разделенный перегородкой, в одной половине которого заключен идеальный газ, а в другой половине создан абсолютный вакуум (рис. 2.55, *а*). Пусть в некоторый момент перегородка удалена или прорвана, и газ расширяется в пустоту. Благодаря хаотическому движению молекул газ через некоторое время займет весь объем $2V$ и заполнит его равномерно (рис. 2.55, *б*).

В процессе расширения в пустоту к газу не подводилось тепла ($\Delta Q = 0$) и он не совершал никакой в н е ш н е й работы ($\Delta A = 0$). Из первого начала термодинамики (31.3) тогда следует, что

$$\Delta U = 0,$$

т. е. внутренняя энергия газа осталась неизменной ($U = \text{const}$). Поскольку энергия идеального газа зависит только от его температуры, то в результате расширения в пустоту температура газа не изменится ($T = \text{const}$). Так как объем газа увеличился вдвое, то при этом окончательное давление по уравнению Менделеева — Клапейрона упадет вдвое; в самом деле,

$$RT = pV = p' \cdot 2V,$$

откуда $p' = p/2$.

Рассмотренный процесс непосредственно необратим. Можно ждать сколь угодно долгое время и практически никогда не дождаться, чтобы все молекулы газа сами собой собрались в одной половине сосуда. Попробуем тогда вернуть газ в исходное состояние, передвигая одну из стенок сосуда как поршень (рис. 2.55, *в*). При этом газ будет оказывать сопротивление движению поршня и для его сжатия придется совершить работу $\Delta A'$ и тем самым уменьшить энергию механических движений окружающих тел на $\Delta A'$. Поскольку при сжатии газ нагревается, то, чтобы сохранить его первоначальную температуру, придется отвести от него некоторое количество теплоты $\Delta Q' = \Delta A'$, т. е. увеличить энергию теплового движения каких-то других (или тех же самых) окружающих тел.

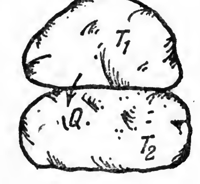


Рис. 2.56.

Таким образом, когда мы вернем газ, расширившийся в пустоту, в исходное состояние, некоторое количество энергии механических движений окружающих тел перейдет в энергию теплового движения других (или тех же самых) внешних тел. Следовательно, процесс расширения газа в пустоту необратим. *При возвращении газа с помощью каких-либо машин или механизмов в исходное состояние, в окружающих телах обязательно останутся какие-то изменения, связанные с превращением некоторого количества механической энергии в тепловую.*

2. Приведем в соприкосновение два тела с различной температурой (рис. 2.56). Тело с более высокой температурой T_1 назовем **нагревателем**, а тело с более низкой температурой T_2 — **холодильником**. Вследствие теплопроводности от нагревателя к холодильнику перейдет некоторое количество теплоты Q.

Этот процесс также необратим. Тепло всегда переходит от более горячего тела к более холодному, и никогда вследствие теплопроводности не осуществляется обратный процесс — самопроизвольный переход тепла от холодного тела к горячему.

Чтобы вернуть холодильник и нагреватель в исходное состояние, используем в качестве машины некоторое количество газа, заключенного в сосуд с поршнем, и проведем с ним замкнутый цикл, аналогичный циклу, изображенному на рис. 2.53, но только в обратном направлении *14321* (рис. 2.57).

При расширении газа, производящего внешнюю работу, его температура понизится. При температуре газа T, меньшей температуры холодильника T_2 ($T < T_2$), можно будет отвести из холодильника и вернуть газу количество теплоты Q, ранее переданное газом холодильнику. Чтобы это тепло вернуть в нагреватель, газ надо предварительно сжать. В результате работы, совершенной при этом внешними силами, газ нагреется. Когда температура газа T превысит T_1 ($T > T_1$), можно будет передать нагревателю ранее взятое у него количество теплоты. *Однако, если мы захотим, чтобы рабочее тело — газ — в конце концов вернулось в исходное состояние, мы должны будем передавать нагревателю больше тепла, чем у него было отнято*. Действительно, если количество теплоты, перешедшее от холодильника к газу, равно Q, а работа внешних сил за весь цикл равна A', то количество теплоты $Q + Q'$, переданное нагревателю, будет равно

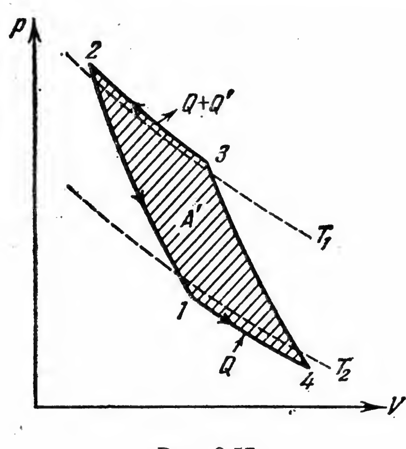


Рис. 2.57.

$$Q+Q'=Q+A'.$$

(Напомним, что работа A' измеряется величиной площади цикла.)

Чтобы нагреватель вернулся в исходное состояние, он должен передать окружающим телам излишек полученного тепла.

Таким образом, возвращая нагреватель, холодильник и газ в исходное состояние, мы обнаружим, что и в этом случае в окружающей природе произошли изменения (как и в примере 1). Следовательно, процесс теплообмена между телами с различной температурой необратим.

Следует еще указать, что изображенный на рис. 2.57 обратный цикл широко применяется в холодильной технике. Совершая непрерывно механическую работу A' и превращая ее в тепло Q', отдаваемое окружающей среде (являющейся нагревателем), можно благодаря этому отнимать у холодильного шкафа значительное количество теплоты Q и отдавать его той же окружающей среде, т. е. охлаждать сам шкаф *).

*) В новых полупроводниковых холодильниках процесс идет за счет превращения в тепло некоторого количества электрической энергии тока, протекающего в полупроводниковой цепи, что в принципе вполне эквивалентно рассмотренному. Подробнее о полупроводниках см. в томе II.

Не следует, однако, думать, что любой тепловой процесс в принципе необратим. Приведем два важнейших примера принципиально обратимых процессов.

3. Адиабатическое сжатие (или расширение). Как мы видели в § 34, при адиабатическом процессе нет необратимого теплообмена с окружающей средой ($\Delta Q = 0$) и

$$\Delta A = -\Delta U.$$

При адиабатическом расширении газ толкает поршень, увеличивая энергию его механического поступательного движения за счет уменьшения своей внутренней энергии (т. е. охлаждения). При адиабатическом сжатии поршень, сдавливая газ, сам тормозится и его механическая энергия переходит обратно во внутреннюю энергию газа. Таким образом, произведя адиабатическое расширение, а затем адиабатическое сжатие, можно вернуть газ полностью в исходное состояние без того, чтобы в окружающей природе произошли бы какие-нибудь изменения.

4. Изотермическое расширение (сжатие). Как мы видели в § 34, при изотермическом расширении идеального газа его энергия остается постоянной ($\Delta U = 0$) и работа совершается за счет теплообмена с окружающей средой:

$$\Delta A = \Delta Q.$$

Как указывалось в примере 2, теплообмен между двумя телами с различной температурой является необратимым процессом. Если же сделать разность температур ΔT между расширяющимся газом и резервуаром, из которого черпается тепло, бесконечно малой, то теплообмен будет идти сколь угодно медленно. В пределе бесконечно медленного процесса разность температур обратится в нуль: температура расширяющегося газа будет все время совпадать с температурой резервуара.

Но при отсутствии разности температур в каждый момент времени всю систему можно считать находящейся в состоянии т е п л о в о г о р а в н о в е с и я. В пределе бесконечно медленный процесс как бы превращается в бесконечную последовательность равновесных состояний.

Процесс, текущий бесконечно медленно и представляющий собой последовательность равновесных состояний, называется к в а з и с т а т и ч е с к и м.

Существенно, что в силу отсутствия разности температур в системе любые «соседние» состояния квазистатического процесса могут чередоваться в любом порядке. Например, расширение может быть приостановлено и заменено сжатием, и вся последовательность состояний повторится, но в обратном порядке. *Квазистатические процессы обратимы.*

Из приведенных примеров механических и тепловых процессов видно, что в природе, кроме обратимых явлений, имеют место и явления необратимые, протекающие лишь в одном направлении. Опыт показывает, что *реальные тепловые процессы всегда необратимы*. Очевидно, что должны существовать и общие закономерности, указывающие *направленность* этих процессов. Эти закономерности должны быть связаны с качественными особенностями теплового движения молекул, рассмотренными в предыдущих главах. Необходимо, следовательно, ввести соответствующую количественную характеристику этих особенностей, которая смогла бы указывать направленность процессов. Такой количественной характеристикой является величина, называемая энтропией, к рассмотрению которой мы и переходим.

§ 36. Энтропия

Качественным отличием теплового движения молекул от других форм движения является его хаотичность, беспорядочность. Для характеристики теплового движения следует поэтому ввести количественную меру степени молекулярного беспорядка.

В § 16, рассматривая распределение молекул по объему, мы выяснили, что различные макроскопические состояния газа имеют разную вероятность. Из состояний газа, изображенных на рис. 2.1, первое и второе, когда все молекулы соберутся в одной части сосуда (рис. 2.1, *а*, *б*), осуществляются каждое лишь одним-единственным способом (все молекулы в одной части) и поэтому настолько маловероятны, что практически не осуществляются вовсе. Состояние же, соответствующее равномерному распределению молекул по всему объему (рис. 2.1, *в*), осуществляется огромным числом способов (число перестановок молекул обеих частей сосуда) и является наиболее вероятным.

Вообще, данное макроскопическое состояние газа с определенными средними значениями параметров представляет собой непрерывную смену близких микроскопических состояний, отличающихся друг от друга распределением одних и тех же молекул в разных частях объема и распределением энергии между различными молекулами. Число W этих непрерывно сменяющих друг друга микросостояний и характеризует степень беспорядочности макроскопического состояния всей системы. Как указывалось в § 16, величина W в статистической физике носит название термодинамической вероятности данного макросостояния.

Однако характеризовать степень беспорядочности молекулярного движения с помощью величины W неудобно. Действительно, рассмотрим систему, состоящую из нескольких независимых частей. Пусть вероятность состояния первой части равна W_1, второй W_2

и т. д., и последней W_n. Вероятность состояния всей системы W, согласно правилу умножения вероятностей (см. Приложение I, стр. 328), будет равна

$$W = W_1 W_2 \ldots W_n. \qquad (36.1)$$

Гораздо удобнее, если величина, характеризующая систему, будет не произведением, как (36.1), но суммой величин, характеризующих разные части системы. Именно с такими величинами мы имели дело в механике: количество движения системы равно сумме количеств движений частиц, образующих систему; энергия системы равна сумме энергий ее (невзаимодействующих) частей; потенциальная энергия системы есть сумма энергий взаимодействия всех пар частиц, входящих в систему, плюс сумма их энергий во внешнем поле, и т. д. Как предложил впервые Больцман, в качестве функции, характеризующей меру беспорядочности теплового движения, следует взять величину S, пропорциональную логарифму вероятности W. Так как

$$\ln W = \ln (W_1 W_2 \ldots W_n) = \ln W_1 + \ln W_2 + \ldots + \ln W_n, \qquad (36.2)$$

то функция

$$S = k \ln W = k \ln W_1 + k \ln W_2 + \ldots + k \ln W_n \qquad (36.3)$$

будет удовлетворять поставленному выше требованию:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n. \qquad (36.4)$$

Выберем множитель k равным постоянной Больцмана (смысл такого выбора этого, вообще говоря, произвольного множителя пояснен в примечании на стр. 177). Величина S называется э н т р о п и е й рассматриваемой системы и зависит от значений макроскопических параметров (V, p, T,...), определяющих состояние системы. Следовательно, энтропия S является однозначной ф у н к ц и е й с о с т о я н и я с и с т е м ы.

Кроме отмеченного уже преимущества энтропии S перед вероятностью W, состоящего в том, что энтропия системы S равна сумме энтропий S_i входящих в систему частей (в то время как W есть произведение W_i), отметим еще одно.

Если движение системы абсолютно упорядоченно, например, все молекулы тела движутся с одной и той же угловой скоростью ω вокруг оси вращения (рис. 2.58), то такое состояние осуществляется одним-единственным способом, и его термодинамическая вероятность $W_{\text{упор}} = 1$. Согласно (36.1) тогда

$$S_{\text{упор}} = k \ln 1 = 0, \qquad (36.5)$$

т. е. энтропия абсолютно упорядоченного движения равна нулю. Отсюда следует вывод, что *энтропия механических движений, которые всегда упорядоченны, равна нулю*:

$$S_{\text{мех}} = 0. \qquad (36.6)$$

Используя введенное определение (36.3) энтропии как меры степени беспорядочности молекулярных движений, проанализируем теперь, как меняется S при рассмотренных в предыдущем параграфе необратимых и обратимых процессах.

1. При расширении газа в пустоту (рис. 2.55) средняя энергия молекул и их распределение по скоростям не меняются. В противоположность этому, распределение молекул в пространстве изменяется. При увеличении объема молекулы газа приобретают возможность попадать в области пространства, ранее им недоступные. Благодаря этому возрастает число различных возможных микросостояний, и степень беспорядка увеличивается.

Рис. 2.58.

Число таких возможных микросостояний для одиночной молекулы прямо пропорционально предоставленному объему сосуда V. Для идеального газа, содержащего в этом объеме N молекул,

$$W \sim \underbrace{V \cdot V \cdot V \ \ldots \ V}_{N \text{ раз}} = V^N, \qquad (36.7)$$

и, следовательно,

$$S = kN \ln V + \text{const}. \qquad (36.8)$$

При расширении газа в пустоту и увеличении его объема (при постоянной внутренней энергии, а следовательно, и температуре) от V до $2V$ энтропия газа возрастает на величину

$$\Delta S = kN \ln 2V - kN \ln V = kN \ln 2 > 0. \qquad (36.9)$$

Для киломоля газа

$$\Delta S = kN_0 \ln 2 = 0{,}693R \approx 5{,}75 \ \text{кДж/(кмоль} \cdot \text{К)}. \qquad (36.9а)$$

Величина ΔS представляет собой количественную меру увеличения степени хаотичности молекулярных движений в данном процессе.

Обратный процесс, когда все молекулы газа собираются в одной половине предоставленного им объема, сам собой не осуществляется. Если бы такой процесс имел место, то это значило бы, что степень беспорядка в газе и его энтропия могут самопроизвольно *уменьшаться*, и газ, находившийся в более вероятном состоянии, самопроизвольно перешел бы в состояние, во много раз менее вероятное.

2. При данной температуре внутренняя энергия тела известным образом распределяется между его молекулами, и тело обладает определенной энтропией S. При сообщении телу некоторого количества теплоты ΔQ интенсивность и энергия теплового движения возрастают и становятся возможными новые микросостояния с бо́льшими значениями энергии отдельных молекул. Увеличение числа

возможных состояний W согласно (36.1) приводит к возрастанию энтропии тела на некоторую величину ΔS.

В случае расширения газа в пустоту объем его увеличивается от V_1 до V_2 и энтропия возрастает при этом согласно (36.8) на $\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1}$. В то же время, если такое же расширение газа осуществить в результате обратимого (изотермического) процесса, то газу будет передано при этом количество теплоты $\Delta Q_{обр} = \Delta A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ [см. формулу (34.16)]. Сравнивая выражения для ΔS и $\Delta Q_{обр}$, получим:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_{обр}}{T}, \qquad (36.10)$$

т. е. *возрастание энтропии тела численно равно* *) *количеству теплоты, сообщенному телу в квазистатическом (т. е. обратимом) процессе, деленному на абсолютную температуру тела.* Статистический анализ показывает, что изменение энтропии связано с количеством сообщенного телу тепла соотношением (36.10) при *любых* процессах, если только в самой системе не происходит необратимых изменений.

С помощью (36.10) легко вычислить изменение энтропии при теплообмене. Подчеркнем при этом еще раз то важное обстоятельство, что *в* (36.10) *стоит не то* ΔQ, *которое проявляется в реальном процессе, но* $\Delta Q_{обр}$ — *величина, которая имела бы место, если бы процесс шел квазистатически, обратимо.*

Определение энтропии согласно (36.10) было дано впервые Клаузиусом, однако физический смысл этой величины стал вполне понятен лишь после того, как Больцман связал эту величину со статистической вероятностью состояния.

Если теплообмен между двумя телами происходит обратимо, то это значит, что температуры этих тел одинаковы. Вероятность состояния всей *системы в целом* при обратимом процессе не меняется, а значит, и энтропия должна остаться постоянной. Действительно,

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2.$$

Если тело *1* теряет количество теплоты ΔQ, а тело *2* его приобретает, то при одинаковой температуре обоих тел T

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_1 &= \frac{-\Delta Q}{T}, \\ \Delta S_2 &= \frac{+\Delta Q}{T}, \end{aligned}\right\} \qquad (36.11)$$

*) Если бы в формуле (36.3) вместо постоянной Больцмана был выбран другой множитель пропорциональности, то *равенство* (36.10) пришлось бы заменить менее удобным *соотношением пропорциональности.*

так что
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0. \qquad (36.12)$$

Если температура тел различна и $T_1 > T_2$, то *рассматривая изменения состояния обоих тел так, как если бы они происходили квазистатически*, имеем:
$$\left.\begin{aligned} \Delta S_1 &= \frac{-\Delta Q}{T_1}, \\ \Delta S_2 &= \frac{+\Delta Q}{T_2} \end{aligned}\right\} \qquad (36.13)$$

и
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{\Delta Q}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_2} = \Delta Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) > 0, \qquad (36.14)$$

так как $1/T_2 > 1/T_1$. Таким образом, необратимый процесс, протекающий так, что вероятность состояния возрастает, действительно сопровождается возрастанием энтропии.

Убыль энтропии при переходе остывающего тела *1* к более упорядоченному состоянию перекрывается увеличением энтропии тела *2*, так что в целом энтропия возрастает. Следовательно, процесс теплообмена идет сам по себе в таком направлении, при котором степень беспорядка молекулярного движения возрастает, а значит, увеличивается энтропия, и окончательное состояние оказывается более вероятным, чем начальное.

Обратный процесс передачи тепла от более холодного тела к более горячему был бы связан с уменьшением степени беспорядка молекулярного движения и энтропии, а потому самопроизвольно в природе происходить не может (пределы применимости этого положения будут обсуждены в § 37).

Вычисляя изменение энтропии при переходе из одного состояния в другое, мы должны «совершать» переход квазистатически, обратимо, и полученный результат будет верен, каким бы путем ни произошел переход.

Чтобы проиллюстрировать это обстоятельство, вернемся к рассмотренному выше процессу расширения газа в пустоту (рис. 2.55). При этом теплообмен не имел места, следовательно, $\Delta Q = 0$, а значит, и $\frac{\Delta Q}{T} = 0$. В действительности же, как было выяснено выше, степень беспорядка молекулярного движения при расширении в пустоту возрастает, так что возрастает и энтропия. Чтобы определить величину ее возрастания, необходимо перевести газ из начального состояния $(p_1,\ V_1,\ T_1)$ в конечное $(p_2 = {}^1/_2 p_1,\ V_2 = 2V_1,\ T_2 = T_1)$ с помощью *обратимого* процесса. Это можно сделать поразному, так как *энтропия есть функция состояния* и не зависит от пути перехода в это состояние.

Поступим, например, так. Будем бесконечно медленно, т. е. квазистатически, обратимо расширять газ без теплообмена (адиа-

батически). При этом $\Delta Q_{обр} = 0$ и следовательно, изменение его энтропии $\Delta S = \Delta Q_{обр}/T = 0$, т. е. энтропия остается постоянной. Но при таком расширении газ производит работу за счет своей внутренней энергии, и температура его падает. Приведя газ к объему $2V_1$, мы получим систему с той же энтропией, но более низкой температурой.

Это значит, что увеличение хаотичности распределения молекул в пространстве за счет возрастания объема, занимаемого газом, в точности компенсируется уменьшением хаотичности в распределении молекул по скоростям при уменьшении температуры (см. стр. 176, 177).

Чтобы привести газ к нужному состоянию, следует теперь его нагреть. Но при нагревании газа энтропия его возрастает. Следовательно, энтропия конечного состояния ($p_2 = {}^1/_2 p_1$, $V_2 = 2V_1$, $T_2 = T_1$) больше энтропии начального состояния (p_1, V_1, T_1). Полученный (качественно) результат совпадает с выводом, к которому мы пришли выше. Точный расчет привел бы к тем же [формула (36.9)] количественным выводам.

Аналогичный результат мы получили бы для любых реальных процессов, происходящих с теплообменом или без теплообмена. Любой реальный процесс всегда направлен так, что вероятность состояния, а значит, и энтропия возрастают.

3. При адиабатическом расширении газа, как мы указали выше, его энтропия не меняется. Но газ совершает работу, и, кроме изменения состояния газа, меняется и состояние окружающих тел. Это изменение состоит в увеличении энергии их механических движений. Однако из определения энтропии следует, что энтропия механического движения, независимо от его интенсивности, равна нулю [согласно (36.6)], и энтропия окружающих тел в рассматриваемом процессе меняться не будет.

Таким образом, при адиабатическом расширении или сжатии тела его энтропия и энтропия окружающих тел остаются неизменными. *При адиабатическом процессе суммарная степень беспорядка молекулярных движений всех тел остается неизменной,* и этот процесс является обратимым.

4. В процессе изотермического расширения принимают участие три тела: резервуар, из которого черпается тепло, сам расширяющийся газ и поршень, приобретающий кинетическую энергию. Чтобы этот процесс был обратимым, необходимо отличие температур резервуара и газа на бесконечно малую величину, т. е. практическое их равенство

$$T_{рез} = T_{газ} = T.$$

Изменение энтропии системы ΔS в этом процессе складывается из изменения энтропии резервуара, изменения энтропии газа и из энтропии возникшего механического движения поршня. Обозначая

переданное резервуаром газу тепло через Q, мы можем написать:

$$\Delta S = \frac{-Q}{T_{\text{рез}}} + \frac{+Q}{T_{\text{газ}}} + S_{\text{мех}} = -\frac{Q}{T} + \frac{Q}{T} + 0 = 0. \qquad (36.15)$$

Насколько уменьшается энтропия резервуара, от которого отнимается тепло, ровно настолько возрастает энтропия расширившегося газа за счет увеличения его объема.

Изменение энтропии системы при обратимом изотермическом расширении равно нулю, так как степень беспорядка молекулярного движения при этом не меняется.

§ 37. Второе начало термодинамики

Основываясь на рассмотренных в предыдущем параграфе примерах, можно теперь сформулировать общую закономерность, определяющую направление тепловых процессов.

Как мы видели, обратимыми являются те тепловые процессы, при которых степень беспорядочности молекулярных движений *во всей системе участвующих в процессе тел* не увеличивается и энтропия системы остается постоянной. Необратимые же процессы идут сами собой в таком направлении, что степень хаотичности молекулярных движений увеличивается и энтропия всей системы возрастает. Поскольку энтропия пропорциональна логарифму вероятности состояния системы, то мы можем сформулировать общий закон, носящий название второго начала термодинамики:

При всех процессах, происходящих в макроскопической системе, система не может самопроизвольно переходить из более вероятного состояния в менее вероятное. Конечное состояние системы всегда будет или более вероятным, чем начальное, или, по крайней мере, будет иметь ту же вероятность W и энтропию S. Используя введенное выше определение энтропии, можно дать краткую математическую запись второго начала:

$$\boxed{\Delta S \geqslant 0.} \qquad (37.1)$$

При всех процессах, происходящих в макроскопической системе, энтропия системы возрастает (необратимые процессы) или, в крайнем случае, остается неизменной (обратимые процессы).

Мы отмечали уже выше, что понятие энтропии (означающее «способность к превращению») было введено впервые Клаузиусом чисто *феноменологически* (т. е. чисто описательно, не входя в рассмотрение физического механизма явлений) как величины, дифференциал которой dS равен согласно (36.10) пределу $\Delta Q_{\text{обр}}/T$.

Клаузиусу принадлежит также простая формулировка второго начала:

Теплота никогда не может переходить сама собой от тел с более низкой температурой к телам с более высокой температурой.

Томсон и Планк формулируют второе начало следующим образом:

*В природе невозможен процесс, полный эффект которого состоял бы только в охлаждении теплового резервуара и в эквивалентном подъеме груза *).*

Заметим, что обе формулировки не следует понимать в узком смысле — речь идет не о невозможности непосредственного процесса, но о невозможности реализовать его с помощью любых приспособлений, когда в результате процесса в природе не произошло бы никаких других изменений, связанных с увеличением энтропии других систем.

Имеющиеся вокруг нас тепловые резервуары содержат огромные количества внутренней энергии. Трудно оценить запас внутренней энергии тепловой воды океана. Можно, например, подсчитать, что океанский корабль с двигателем мощностью 100 000 кВт мог бы полностью обеспечить работу своей машины за счет охлаждения морской воды на 15° (от 20 до 5 °С), охлаждая 1 м³ воды в течение 6 с, т. е. всего 10 м³ морской воды в минуту. К сожалению, этот процесс термодинамически невозможен, и, плывя по такому, в буквальном смысле слова, океану энергии, корабль вынужден сжигать уголь или нефть.

Машина, которая работала бы за счет внутренней энергии одного теплового резервуара, получила название «перпетуум мобиле» (т. е. вечного двигателя) второго рода.

В отличие от «перпетуум мобиле» первого рода — двигателя, производящего энергию «из ничего», невозможность которого следует из закона сохранения энергии, двигатель второго рода работал бы без нарушения закона сохранения энергии. Однако его работа была бы нарушением второго начала термодинамики.

Таким образом, второе начало термодинамики, в виде положения Томсона — Планка, может быть сформулировано коротко так:

Перпетуум мобиле второго рода невозможен.

Вернемся теперь ко второму закону в его количественной формулировке с помощью энтропии. Справедливость соотношения (37.1) была проиллюстрирована нами на ряде конкретных примеров в § 35. В общем виде это неравенство было доказано Л. Больцманом методами статистической физики. Более подробный анализ вывода Больцмана, на котором мы здесь не имеем возможности останавливаться, позволяет выяснить границы применимости второго начала термодинамики.

*) То есть в эквивалентной механической работе.

1. Вывод Больцмана основан на применении методов статистической физики и теории вероятностей. Поэтому и окончательный результат носит *вероятностный* характер. Неравенство (37.1) следует, строго говоря, формулировать так:

Наиболее вероятным изменением энтропии системы является ее возрастание.

Как и все другие выводы статистической физики, второе начало термодинамики справедливо с точностью до флуктуаций, о которых мы упоминали в § 16. Флуктуации плотности и давления — это процессы, при которых вероятность состояния и его энтропия могут убывать.

В отличие от таких законов природы, как закон сохранения количества движения или энергии (в применении к тепловым процессам — первое начало термодинамики), второе начало термодинамики не является столь же непременным законом. С точки зрения кинетической теории увеличение энтропии есть лишь *наиболее вероятный, но отнюдь не обязательный* путь развития системы. Это — статистический закон, отклонения от которого вполне возможны.

Самопроизвольное уменьшение энтропии макроскопической системы не невозможно, но весьма маловероятно. Чем бóльшую совокупность частиц содержит данная система, тем менее вероятны отклонения от статистических закономерностей.

В случае же систем, состоящих из небольшого числа частиц или малых частей большой системы, вероятности отклонений наблюдаемых величин от средних становятся не слишком малыми и процессы, связанные с убыванием энтропии, уже могут наблюдаться.

Так, например, в результате броуновского движения пылинка может подняться на значительную высоту. Работа, необходимая для ее подъема, черпается из запаса кинетической энергии хаотического движения молекул. Следовательно, газ, в котором поднимается пылинка, в результате ее подъема остывает, и его энтропия уменьшается. Однако, если бы строитель стал ждать, пока благодаря случайным флуктуациям движений молекул воздуха кирпич, лежащий на земле, сам собой поднялся на высоту второго этажа за счет охлаждения окружающего воздуха, ему пришлось бы прождать время, неизмеримо большее продолжительности существования Солнечной системы.

2. Реальная макроскопическая система всегда соприкасается с окружающими телами (например, газ — со стенками сосуда) и взаимодействует с ними. В этом взаимодействии в каждый данный момент времени принимает участие лишь относительно небольшая доля частиц, составляющих систему, а именно те частицы, которые находятся у границы с окружающими телами. Поэтому энергия взаимодействия пограничных молекул $E_{вз}$ в каждый данный момент времени ничтожно мала по сравнению с внутренней энергией си-

стемы U, которая пропорциональна общему числу всех частиц, составляющих систему:

$$E_{вз} \leqslant U. \tag{37.2}$$

Системы, для которых выполняется соотношение (37.2), называются почти изолированными. В каждый данный момент и за сравнительно короткие промежутки времени можно практически пренебречь энергией связи такой системы с окружающей средой $E_{вз}$ и рассматривать систему как изолированную.

Однако, несмотря на малую относительную величину $E_{вз}$, за длительный промежуток времени слабое, но непрерывное взаимодействие с окружающей средой может привести к существенным изменениям состояния системы. Так, если впустить холодный разреженный газ в горячий сосуд, температура стенок которого поддерживается постоянной, то в каждый данный момент будет возрастать средняя кинетическая энергия лишь тех молекул газа, которые непосредственно ударяются о стенки сосуда, и энергия всего газа в целом будет оставаться практически неизменной. Но с течением времени это относительно слабое, но непрерывное взаимодействие газа со стенками сосуда полностью изменит состояние газа, и последний примет температуру стенок.

Таким образом, конечное состояние почти изолированной системы будет зависеть от состояния окружающей среды — резервуара, в который помещена система. Состояние резервуара будет определять установившееся равновесное состояние системы и все ее статистические закономерности.

3. Бессмысленно также применять законы статистической физики и, в частности, второе начало (37.1) к такой вообще незамкнутой системе, как вся вселенная в целом, — системе, которая безгранична и безгранично развивается.

Такую незакономерную попытку в 1867 г. сделал Клаузиус. Применяя второе начало термодинамики ко всей вселенной, он пришел к выводу, что рано или поздно ее энтропия должна достигнуть своего максимума. Это значит, что со временем все формы движения (механического, электрического, светового) должны перейти в тепловую форму хаотического молекулярного движения и температуры всех тел во вселенной должны сравняться. Исчезнет качественное различие всех форм движения материи, энергия этого движения качественно деградирует и не сможет переходить в другие формы, соответствующие меньшей энтропии. Все процессы при этом прекратятся, и наступит так называемая «тепловая смерть вселенной».

Идеалистическую концепцию Клаузиуса резко критиковал Энгельс в «Диалектике природы». Дальнейшее развитие статистической физики подтвердило, что проблема тепловой смерти мира является чисто надуманной.

Резюмируя, следует сказать, что второе начало термодинамики имеет свои границы применимости. Его можно применять к системам с большим числом степеней свободы (при достаточно большом числе частиц) и почти изолированным. Судить же о развитии вселенной с точки зрения второго начала нельзя, так как при этом мы выходим за границы его применимости.

В 1906 г. В. Нернст сформулировал положение, получившее название **третьего начала термодинамики**. Физический смысл этого положения выяснился, однако, позднее, с развитием квантовой механики.

В § 19 мы определили абсолютный нуль температуры как состояние системы с наименьшей возможной энергией. Система, находящаяся в равновесии при абсолютном нуле температуры ($T = 0$ K), не может больше отдавать энергию окружающим телам, и ее внутренняя энергия распределена между составляющими ее частицами одним-единственным определенным способом. Все электроны в атомах находятся при этом в наинизших энергетических состояниях, а атомы располагаются в пространстве определенным образом (в узлах кристаллической решетки твердого тела). Благодаря полной упорядоченности этого единственного состояния его термодинамическая вероятность $W = 1$. Таким образом, оказывается, что

$$\boxed{S_{T \to 0} = k \ln 1 = 0}, \tag{37.3}$$

т. е. *при абсолютном нуле энтропия тела обращается в нуль*. Это и есть формулировка третьего начала термодинамики *).

Уравнения (31.3), (37.1) и (37.3), физический смысл которых разобран в последних двух главах, являются основой всей технической термодинамики и ее многочисленных практических применений. Эти три основных начала позволяют рассчитывать различные тепловые машины: паровые двигатели, двигатели внутреннего сгорания и современные реактивные двигатели. На основе этих формул можно оценить эффективность различных циклов и проанализировать максимально достижимые значения коэффициентов их полезного действия. Остановимся коротко на последнем вопросе.

Основной задачей тепловых машин является превращение тепла в работу. Однако, если пытаться непосредственно отнять от нагретого тела некоторое количество тепла Q_1 и превратить его в работу, то такой процесс оказывается противоречащим второму началу и термодинамически невозможным, так как в этом случае энтропия нагретого тела уменьшается без всякой компенсации.

Подобный процесс можно осуществить лишь за счет одновременного увеличения энтропии другого тела, например, отдавая ему

---

*) Пределов применимости третьего начала мы здесь касаться не будем.

часть тепла Q_2. Возрастание энтропии второго тела должно быть при этом не меньше убывания энтропии первого тела. Поэтому в соответствии с (36.10), если $Q_2 < Q_1$, то и $T_2 < T_1$, т. е. второе тело должно иметь более низкую температуру, чем первое.

Однако, если передавать тепло Q_2 от нагревателя с температурой T_1 к холодильнику с температурой T_2 непосредственным соприкосновением, то такой процесс пойдет необратимо, а механическая работа вообще не будет получаться. Поэтому в процессе, кроме нагревателя, холодильника и поршня, должно обязательно принять участие четвертое тело, которое должно обратимо отнять тепло Q_1 от нагревателя, обратимо отдать часть тепла Q_2 холодильнику, а разность $Q_1 - Q_2$ передать поршню в виде механической работы A. Само это четвертое, «рабочее тело» должно в результате процесса вернуться в исходное состояние, т. е. совершить замкнутый цикл, приводившийся в § 34, а затем повторять его, если необходима машина непрерывного действия.

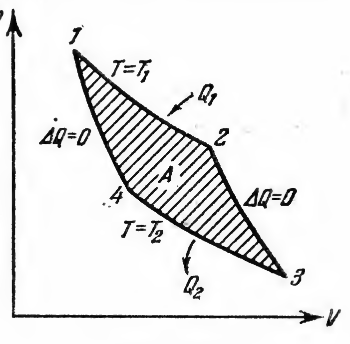


Рис. 2.59.

Очевидно, что наибольшим к. п. д. будет обладать цикл, состоящий из целиком обратимых процессов, при котором не происходит необратимых переходов тепла от нагревателя к холодильнику с бесполезным увеличением энтропии. Такой обратимый цикл был впервые теоретически проанализирован С. Карно в 1824 г. и носит название **цикла Карно**.

Цикл Карно, изображенный на рис. 2.59, состоит из четырех обратимых процессов — двух изотермических и двух адиабатических. На участке *1—2* рабочее тело изотермически расширяется и отнимает от нагревателя некоторое количество тепла Q_1 при температуре T_1. На участке *2—3* рабочее тело отключается от нагревателя и адиабатически расширяется, продолжая толкать поршень и охлаждаясь до температуры холодильника T_2 (точка *3*). На участке *3—4* поршень изотермически сжимает рабочее тело, сообщенное с холодильником, которому оно отдает тепло Q_2. Наконец, на участке *4—1* рабочее тело отключается от холодильника и продолжает адиабатически сжиматься поршнем до исходного состояния *1*.

Как было показано в § 34, заштрихованная площадь цикла дает работу A, совершенную рабочим телом.

По первому началу термодинамики

$$A = Q_1 - Q_2. \tag{37.4}$$

Поскольку все отдельные процессы обратимы, то по второму началу термодинамики суммарное изменение энтропии всех четырех тел равно нулю:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{холод}} + \Delta S_{\text{раб. тела}} + S_{\text{поршня}} = 0. \qquad (37.5)$$

Как было выяснено выше, энтропия $S_{\text{поршня}}$ равна нулю. Рабочее тело в конце цикла возвращается в исходное состояние, и $\Delta S_{\text{раб.тела}} = 0$. Величины $\Delta S_{\text{нагр}}$ и $\Delta S_{\text{холод}}$ рассчитываются по формуле (36.10). Подставляя эти значения в (37.5), получаем для изменения энтропии ΔS в цикле:

$$\Delta S = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{+Q_2}{T_2} + 0 + 0 = 0,$$

откуда

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (37.6)$$

Коэффициент полезного действия цикла η представляет собой отношение полученной работы к полному количеству теплоты, отнятому от нагревателя. Из (37.5) и (37.6) тогда находим, что

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (37.7)$$

т. е. *максимальный к. п. д. тепловой машины тем больше, чем выше температура нагревателя T_1 и чем ниже температура холодильника T_2*. Именно в силу этого обстоятельства теплотехники стремятся к возможному повышению температуры нагревателя. Если в качестве нагревателя использовать кипящую воду с температурой $T_1 = 373$ К, а в качестве холодильника — воздух с температурой $T_2 = 293$ К, то

$$\eta = \frac{373 - 293}{373} = \frac{80}{373} = 0{,}215 = 21{,}5\%. \qquad (37.8)$$

В современных турбинах большой мощности используется пар с температурой, превышающей 900 К, что дает при температуре холодильника 300 К теоретический к. п. д.:

$$\eta = \frac{900 - 300}{900} = \frac{6}{9} = 66{,}7\%. \qquad (37.9)$$

В реальном тепловом двигателе вследствие различных необратимых процессов (теплообмен, трение) к. п. д. при тех же условиях будет, конечно, значительно ниже.

ЧАСТЬ III
АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

ГЛАВА X
РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

§ 38. Молекулярные силы

Рассматривая выше молекулы газа как соединения атомов — «материальных точек», — мы допустили, как это уже отмечалось, идеализацию. Перейдем теперь от рассмотрения свойств идеальных газов к изучению реальных газов. Не пытаясь здесь разобраться детально в строении атомов, входящих в молекулы, все же сделаем ряд качественных выводов, исходя из представлений о сложном строении атомов.

Молекулы газа представляют собой сложные системы движущихся электрических зарядов. Основная масса и весь положительный заряд молекулы сосредоточены в ее атомных ядрах, имеющих линейные размеры порядка $10^{-15} \div 10^{-14}$ м. Вокруг этих ядер по определенным устойчивым орбитам движутся легкие отрицательно заряженные частицы — электроны. Диаметры электронных орбит порядка 10^{-10} м, т. е. в десятки тысяч раз превышают диаметры ядер. Атомы и молекулы представляют собой весьма устойчивые и трудно деформируемые системы. Эта устойчивость обусловлена тем, что состояния атомов и молекул не могут меняться непрерывно, но способны принимать лишь прерывный («дискретный») ряд значений (подробно это будет рассмотрено в томе III). Переход атома из одного возможного состояния в другое связан со сравнительно большим изменением его энергии. Это и приводит к сравнительно большой устойчивости атомов и молекул. Ниже мы увидим, что атомы, например, в известном смысле «тверже» стальных шаров. При столкновении двух стальных шаров, движущихся друг другу навстречу со скоростями 500 м/с, они будут разбиты, в то время как атомы, сталкиваясь с бо́льшими скоростями, не претерпевают никаких изменений в своей структуре.

Обычно суммы положительных и отрицательных зарядов в молекуле равны друг другу, и молекула в целом электрически нейтральна. Благодаря такой компенсации зарядов разного знака в атомах и молекулах электрическое поле за пределами молекулы

очень быстро убывает с расстоянием. Практически его можно считать обращающимся в нуль уже на расстоянии двух — трех диаметров молекулы (т. е. диаметров ее электронной оболочки).

Поэтому при сближении двух молекул, пока расстояние r между их центрами велико по сравнению с их диаметрами d, силы взаимодействия между молекулами пренебрежимо малы (рис. 3.1, *а*).

При дальнейшем сближении, на расстояниях порядка двух — трех диаметров, начинает постепенно проявляться взаимодействие электрических зарядов ядер и электронных оболочек молекул. Благодаря притяжению разноименных и отталкиванию одноименных зарядов произойдет небольшая деформация обеих взаимодействующих молекул, так что мгновенное распределение зарядов в молекуле станет примерно таким, как это показано на рис. 3.1, *б*. В результате между молекулами возникнут силы притяжения $F_{прит}$.

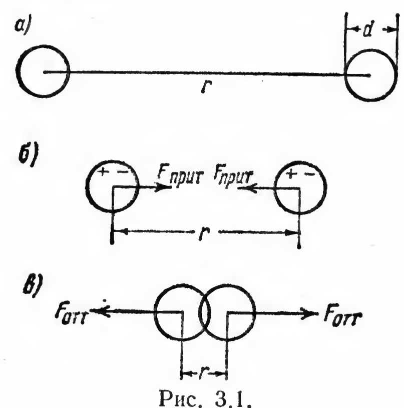


Рис. 3.1.

По мере дальнейшего сближения молекул деформация молекул и величина сил притяжения $F_{прит}$ будут возрастать. Однако, когда молекулы подойдут «вплотную» друг к другу и «соприкоснутся» своими электронными оболочками, то дальнейшее сближение окажется невозможным. Между электронными оболочками возникнут огромные силы отталкивания, резко возрастающие по мере дальнейшего взаимного проникновения оболочек. На таких расстояниях молекулы будут отталкиваться, как это изображено на рис. 3.1, *в*.

Абсолютная величина сил взаимодействия будет существенно зависеть от конкретного строения рассматриваемых взаимодействующих молекул. Кроме того, для несферических молекул силы взаимодействия будут зависеть не только от расстояния r между центрами молекул, но и от взаимной ориентации молекул. Однако общий характер зависимости $F_{вз}$ от r для любых молекул будет качественно одинаков — притяжение на больших расстояниях и отталкивание на малых.

На рис. 3.2, *а* изображена примерная зависимость молекулярных сил взаимодействия F от r. Значения $F < 0$ соответствуют силам притяжения, а значения $F > 0$ — силам отталкивания. На некотором, характерном для данной пары молекул взаимном расстоянии r_0 притяжение и отталкивание уравновешивают друг друга и результирующая сила взаимодействия обращается в нуль: $F(r_0) = 0$. Это расстояние r_0 соответствует положению равновесия,

в котором могут находиться взаимодействующие молекулы в отсутствие теплового движения.

При небольшом изменении взаимного расстояния между молекулами от величины r до $r + \Delta r$ силы взаимодействия будут совершать работу

$$\Delta A = F\,\Delta r. \tag{38.1}$$

Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия молекул будет меняться на величину ΔU, равную

$$\Delta U = -\Delta A = -F\,\Delta r. \tag{38.2}$$

Выберем начало отсчета для значений энергии взаимодействия при $r = \infty$, когда молекулы удалены друг от друга настолько, что их взаимодействием можно полностью пренебречь. При $r = \infty$ потенциальная энергия равна нулю:

$$U(\infty) = 0. \tag{38.3}$$

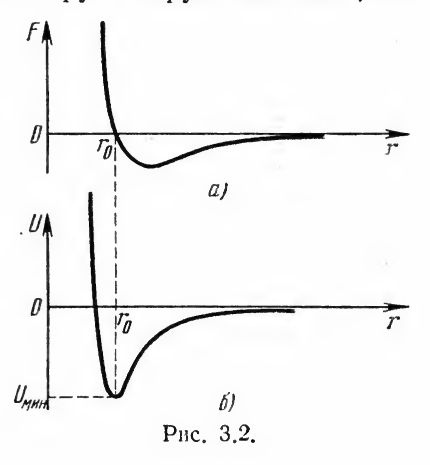


Рис. 3.2.

При постепенном уменьшении r ($\Delta r < 0$) молекулы сближаются и между ними появляются силы притяжения ($F < 0$). Эти силы при сближении совершают положительную работу ($\Delta A = F\Delta r > 0$), и потенциальная энергия взаимодействия согласно (38.2) постепенно уменьшается. При выбранном нами согласно (38.3) начале отсчета потенциальная энергия U будет отрицательна и при $r = r_0$ достигнет своего наинизшего значения $U(r_0) = U_{мин}$ (рис. 3.2, *б*). При переходе через положение равновесия r_0 и дальнейшем сближении молекул между ними возникнут силы отталкивания ($F > 0$), совершаемая против этих сил работа будет отрицательной ($\Delta A = F\Delta r < 0$) и потенциальная энергия взаимодействия начнет круто возрастать *).

Как видно из приведенного рисунка, кривая потенциальной энергии $U = U(r)$ имеет характерный вид так называемой «п о т е н ц и а л ь н о й я м ы». Наибольшую глубину эта потенциальная яма имеет в положении равновесия при $r = r_0$:

$$F = 0 \quad \text{и} \quad U = U_{мин} < 0. \tag{38.4}$$

*) Из соотношения (38.2) следует в пределе $F = -\dfrac{dU}{dr}$, т. е. ординаты верхней кривой дают, с обратным знаком, наклон касательной в соответствующей точке нижней кривой.

Подчеркнем еще раз, что устойчивое положение взаимодействующих молекул соответствует:

1) *наименьшему значению потенциальной энергии взаимодействия молекул* $U(r_0) = U_{\text{мин}}$. Это — общее положение: *система устойчива, если она обладает минимальным запасом энергии;*

2) *равенству нулю сил взаимодействия между молекулами при* $F(r_0) = 0$. Уменьшение r приводит к появлению сил отталкивания (U согласно (38.2) возрастает, так как $F > 0$ и $\Delta r < 0$), увеличение же r приводит к появлению сил притяжения (U также возрастает, так как $F < 0$ при $\Delta r > 0$).

Глубина ямы $|U_{\text{мин}}|$ определяет величину работы, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы молекулы, оказавшиеся в равновесии (при $r = r_0$), оторвать друг от друга и развести на бесконечное расстояние:

$$|U_{\text{мин}}| = 0 - U_{\text{мин}} = -\sum_{r=r_0}^{r=\infty} F\,\Delta r. \tag{38.5}$$

Поскольку средняя кинетическая энергия хаотического теплового движения молекул имеет порядок kT, то структура любой совокупности молекул и агрегатное состояние вещества будут существенно зависеть от соотношения величин $|U_{\text{мин}}|$ и kT.

а) В предельном случае низких температур, когда $kT \ll |U_{\text{мин}}|$, молекулы притянутся друг к другу и расположатся вплотную в определенном порядке — вещество будет находиться в твердом агрегатном состоянии. Тепловое движение молекул в твердом теле будет проявляться в виде малых колебаний молекул около определенных положений равновесия в пространстве.

б) В противоположном предельном случае высоких температур, когда $kT \gg |U_{\text{мин}}|$, интенсивное тепловое движение молекул будет препятствовать соединению молекул в агрегаты из нескольких частиц, сблизившихся до расстояния r_0.

При соударениях молекул эти агрегаты будут моментально разбиваться на составляющие их молекулы, и вероятность образования таких агрегатов будет ничтожно мала. Вещество при этом будет находиться в газообразном агрегатном состоянии.

в) Наконец, при промежуточных температурах, когда $kT \approx |U_{\text{мин}}|$, благодаря тепловому движению молекулы будут непрерывно перемещаться в пространстве, обмениваясь местами, но не увеличивая взаимных расстояний на величину, заметно превышающую величину r_0. Вещество при этом будет находиться в жидком агрегатном состоянии.

Таким образом, любое вещество, в зависимости от своей температуры, может находиться в твердом, жидком или газообраз-

ном состоянии. Температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от конкретного значения величины $|U_{мин}|$ для данного вещества.

У инертных газов (гелий, неон и др.) $|U_{мин}|$ весьма мало. Поэтому подобные вещества при обычных (комнатных) температурах находятся в газообразном состоянии и переходят в жидкость лишь при очень низких температурах, близких к абсолютному нулю. В противоположность этому, у металлов, как правило, $|U_{мин}|$ велико, при обычных температурах они поэтому находятся в твердом состоянии и плавятся лишь при сравнительно высоких температурах.

Агрегатное состояние вещества зависит не только от его температуры, но и от объема V, занимаемого системой его молекул. При достаточно большом значении V молекулы имеют возможность расходиться друг от друга на расстояния, на которых средняя энергия сил притяжения оказывается достаточно малой по сравнению с kT. Поэтому *над твердым телом и жидкостью всегда присутствует небольшое количество того же вещества в газообразном состоянии.*

§ 39. Реальный газ. Пар. Жидкость

При атмосферном давлении и 0 °С в 1 м^3 воздуха содержится округленно $2{,}7 \cdot 10^{25}$ молекул. Считая их в среднем равномерно распределенными в пространстве, мы получим, что на ребре куба длиной 1 м располагаются $\sqrt[3]{27 \cdot 10^{24}} = 3 \cdot 10^8$ молекул. Следовательно, среднее расстояние между молекулами воздуха составляет $r = 1/(3 \cdot 10^8) = 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ м, что в десятки раз превышает диаметры самих молекул [$d \approx (2 \div 3) \cdot 10^{-10}$ м]. На таких расстояниях взаимодействие между молекулами практически отсутствует.

Глубина потенциальной ямы для взаимодействия молекул азота и кислорода составляет примерно $|U_{мин}| = 3 \cdot 10^{-21}$ Дж/молек., а средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $^3/_2\, kT \doteq {}^3/_2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж/молек. Поэтому агрегирование молекул воздуха при этих условиях происходит очень редко, а отдельные, случайно образующиеся агрегаты молекул живут лишь до следующего столкновения, т. е. примерно 10^{-10} с.

Таким образом, при давлениях порядка 1 атм и ниже и при температурах порядка комнатных и выше взаимодействием молекул воздуха можно практически пренебречь и рассматривать его как *идеальный газ*. Уравнение состояния воздуха будет тогда совпадать с уравнением Менделеева — Клапейрона, выведенным нами выше, в гл. V:

$$pV = \nu RT. \tag{39.1}$$

При постоянной температуре ($T = \text{const}$) объем газа V будет обратно пропорционален его давлению p:

$$pV = \text{const} \tag{39.2}$$

или

$$p \sim \rho. \tag{39.3}$$

Уравнение (39.2) было установлено на опыте Р. Бойлем в 1667 г. Во времена Бойля экспериментальная техника была недостаточна для создания высоких давлений и низких температур, при которых газ уже нельзя считать идеальным и при которых взаимодействие молекул начинает сказываться на состоянии газа. В 1748 г. М. В. Ломоносов, развивая молекулярно-кинетическую теорию,

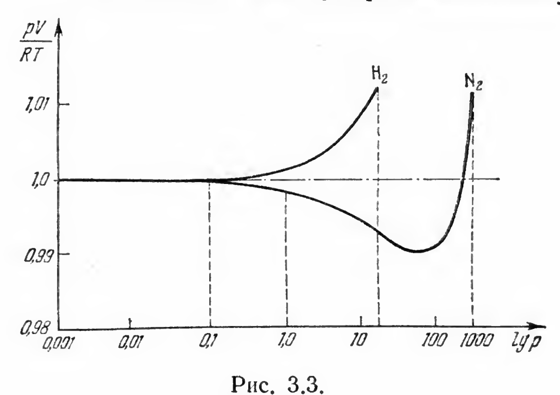


Рис. 3.3.

пришел к выводу, что при больших плотностях сумма объемов молекул станет сравнима с объемом всего газа. Поэтому при больших давлениях упругость газа (p) должна повышаться быстрее, чем его плотность ($\rho = M/V$) и произведение pV должно возрастать.

На рис. 3.3 приведена в полулогарифмическом масштабе *) зависимость pV/RT от p при $T = \text{const} \approx 300$ K для некоторых газов по современным данным. Как видно из графика, до давлений ~ 10 атм $\approx 10^6$ Н/м² произведение pV остается практически постоянным с точностью до 1%.

Поэтому при расчете работы паровых машин и двигателей внутреннего сгорания с достаточной степенью точности можно пользоваться уравнением состояния идеального газа.

При давлениях порядка сотен и тысяч атмосфер произведение pV уже перестает быть постоянным. Как видно из рис. 3.3, для

*) Это значит, что при смещении на одно деление по одной из осей откладываемая на ней величина (в данном случае по оси абсцисс) меняется не *на* столько-то единиц, а *во* столько-то раз. На рис. 3.3 смещение на одно деление вправо отвечает увеличению давления в 10 раз.

водорода полностью оправдывается предсказание Ломоносова о возрастании величины pV с ростом давления. Для кислорода и азота при давлениях порядка 100 атм наблюдается сначала уменьшение величины pV и лишь затем сильный рост, как и для H_2. Это обстоятельство связано с тем, что при постепенном увеличении давления молекулы первоначально сближаются на расстояния, при которых проявляются силы притяжения. В этой области давлений взаимное притяжение молекул ослабляет интенсивность ударов молекул о стенки сосуда и снижает давление газа по сравнению с давлением идеального газа. При еще бо́льших плотностях среднее расстояние между молекулами становится сравнимым с r_0 и начинают проявляться силы отталкивания, увеличивающие давление газа. Благодаря очень малой глубине потенциальной ямы $|U_{мин}|$ для водорода у последнего при обычных температурах минимум произведения pV практически отсутствует и становится заметным лишь при очень низких температурах.

В современной технике широко применяются высокие давления. Чистые газы хранятся и перевозятся в баллонах под давлением 150—200 атм. В прямоточных паровых котлах Рамзина применяется пар высоких параметров с давлением свыше 200 атм. При синтезе аммиака применяются азот и водород, сжатые до нескольких сотен атмосфер, и т. п. При выстреле в стволе орудия развиваются давления в несколько тысяч атмосфер. В исследовательских лабораториях изучаются свойства веществ при давлениях в десятки и сотни тысяч атмосфер. Наконец, при взрывах атомных и водородных бомб развиваются давления порядка миллиардов атмосфер.

При столь больших давлениях и плотностях реальный газ уже нельзя считать идеальным и следует учитывать силы взаимодействия между его молекулами. Экспериментальное изучение поведения газов при высоких и сверхвысоких давлениях позволило уточнить уравнение состояния для ряда практически важных реальных газов.

С другой стороны, в современной технике широко применяются процессы сжижения газов и получения низких температур. Холод необходим для хранения скоропортящихся продуктов и припасов, для специальной закалки металлов, для разделения газовых смесей, которые предварительно охлаждают и превращают в жидкость, а затем дают выкипеть наиболее легколетучим компонентам.

При понижении температуры газа величина kT становится сравнимой с $|U_{мин}|$. Тогда с повышением плотности газа сначала проявляются отклонения от уравнения состояния идеального газа (см. (14.14)), а затем при определенном давлении происходит агрегирование молекул и образование жидкости. Этот переход газа в жидкость (и соответствующее увеличение плотности вещества) не происходит, однако, в виде непрерывного процесса.

Образование жидкости происходит скачком. Над жидкостью остается некоторое количество пара, плотность которого во много раз меньше плотности жидкости. Изучая поверхностное натяжение на границе жидкости и ее пара, Д. И. Менделеев в 1860 г. установил, что по мере повышения температуры разница в свойствах между жидкостью и ее паром уменьшается и поверхностное натяжение падает. *При некоторой температуре*, которую Менделеев назвал температурой абсолютного кипения, поверхностное натяжение обращается в нуль и *разница между жидкостью и ее паром исчезает.* Выше этой температуры вещество может находиться только в газообразном состоянии, независимо от величины давления.

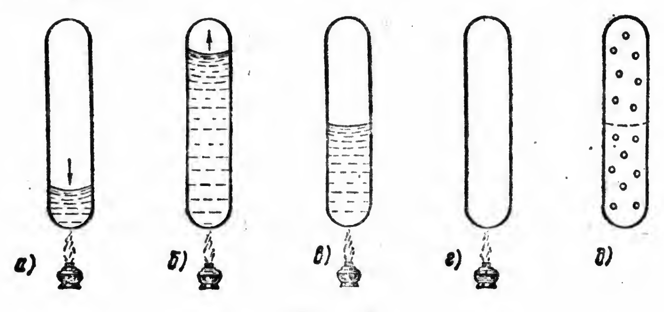


Рис. 3.4.

Исчезновение границы жидкость — пар можно наблюдать при нагревании жидкости в запаянном стеклянном сосуде, из которого предварительно был откачан весь воздух. Если первоначальный объем жидкости меньше объема сосуда, то небольшая часть жидкости испарится и в сосуде будет отчетливо виден мениск, отделяющий жидкость от находящегося над ней пара (рис. 3.4). При нагревании сосуда мениск будет перемещаться вверх или вниз, в зависимости от первоначального количества жидкости. Если начальное количество жидкости невелико, то при нагревании она будет переходить в пар и мениск будет опускаться (рис. 3.4, *а*) до тех пор, пока вся жидкость не испарится и весь сосуд не будет заполнен паром высокого давления и температуры. Если же вначале жидкость заполняла почти весь сосуд, то при нагревании жидкость будет расширяться и мениск — подниматься (рис. 3.4, *б*) до тех пор, пока жидкость не поглотит весь пар и не заполнит сосуд. Если подобрать удачное соотношение между первоначальным количеством жидкости и объемом сосуда, то при нагревании мениск будет оставаться где-то посередине, почти не перемещаясь. В последнем случае (рис. 3.4, *в*) испарение жидкости примерно компенсирует расширение нагреваемой жидкости; масса жидкости убывает, а масса пара соответственно возрастает, но так, что доли

объема сосуда, занимаемые обеими фазами, остаются почти постоянными. С возрастанием температуры плотность жидкости убывает, а плотность пара возрастает, приближаясь к плотности жидкости. При температуре абсолютного кипения (по Менделееву) плотности обеих фаз сравняются, все остальные свойства этих фаз станут тождественными и граница между ними (мениск) исчезнет (рис. 3.4, *г*). Если полученную однородную систему охлаждать, то при переходе сверху через температуру абсолютного кипения в объеме возникнут многочисленные капельки жидкости (рис. 3.4, *д*), которые быстро сольются, и в сосуде вновь появятся две фазы — жидкость и пар, отделенные друг от друга мениском.

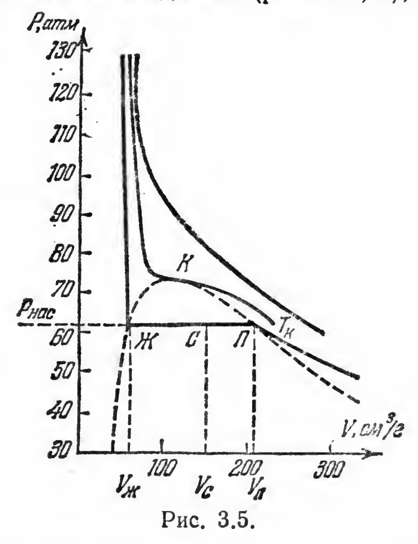


Рис. 3.5.

Для удобства наблюдения за описанным явлением указанные опыты можно проводить с этиловым эфиром. Благодаря невысокой температуре (~200 °С) и давлению (~40 атм) в момент исчезновения фаз его можно помещать в прозрачную стеклянную пробирку.

В 1869 г. Эндрюс экспериментально изучил изотермы для углекислого газа при температурах выше и ниже его температуры абсолютного кипения, которую он назвал **критической температурой**. Результаты измерений Эндрюса изображены на рис. 3.5. При высоких температурах и больших удельных объемах изотермы углекислого газа приближаются к равнобочным гиперболам, соответствующим изотермам идеального газа (39.2). С уменьшением удельного объема давление возрастает сначала несколько медленнее, чем по уравнению (39.2), а затем при сближении молекул до их соприкосновения изотерма становится очень крутой, почти вертикальной.

При температурах ниже критической опытная изотерма распадается на три различных участка. Правая ветвь при низких давлениях соответствует газообразному состоянию вещества и сравнительно мало отклоняется от изотермы идеального газа. По достижении некоторого определенного давления $p_{нас}(T)$, называемого **упругостью насыщенного пара** при данной температуре T, начинается сжижение (точка *П* на рис. 3.5). При дальнейшем уменьшении объема давление остается неизменным (горизонтальный участок изотермы) и лишь все бо́льшая доля

газа переходит в жидкое состояние. В точке *Ж* весь газ переходит в жидкость, и левая крутая ветвь кривой представляет собой изотерму сжатия жидкости.

Таким образом, горизонтальный участок изотермы изображает состояние смеси жидкости и пара. Объем смеси в точке *С* равен

$$V_{см} = (1 - x)\, V_{жидк} + x V_{пар}, \tag{39.4}$$

где $V_{жидк}$ и $V_{пар}$ — соответственно удельные объемы жидкости и пара при давлении $p_{нас}$ и температуре T. Относительная доля x пара в смеси при этом определяется из графика по соотношению пропорциональности отрезков

$$\frac{x}{1-x} = \frac{ЖС}{СП}. \tag{39.5}$$

Таким образом, pV-диаграмма системы при температуре ниже критической ($T < T_k$) распадается на три области: область жидкости, область пара и область смеси пара и жидкости.

Термином *пар* мы обозначаем *такое состояние газа, при котором последний может быть переведен в жидкое состояние простым сжатием без изменения температуры.*

При температуре выше критической такой переход без изменения температуры невозможен, и мы имеем состояние так называемого перегретого пара или просто газа. Линия, отделяющая область двухфазных состояний (смеси) от состояний жидкости и пара, изображенная на рис. 3.5 пунктиром, носит название пограничной кривой.

Как видно из приведенного на рис. 3.5 примера CO_2, взаимодействие молекул при изменении p, V и T приводит к резким количественным и качественным изменениям состояния реального газа и к переходу его в жидкость. Естественно, что для какого-либо другого газа с другим строением молекул взаимодействие последних друг с другом будет отличаться величинами r_0, $U_{мин}$ и других параметров кривой взаимодействия. Однако общий характер этой кривой останется неизменным, и диаграмма состояния любого реального газа должна иметь вид, аналогичный изображенному на рис. 3.5.

При пренебрежении молекулярным взаимодействием молекулы разных газов могут различаться лишь по своей массе. Поэтому все идеальные газы подчиняются одному и тому же уравнению состояния — уравнению Менделеева — Клапейрона. При учете взаимодействия между молекулами (благодаря его специфичности) поведение каждого реального газа должно описываться своим уравнением состояния. *Общее уравнение состояния, пригодное для всех реальных газов, принципиально может быть лишь приближенным.*

§ 40. Уравнение состояния реального газа

Установление более точного вида уравнения состояния реального газа

$$p = f(V,\ T) \tag{40.1}$$

представляет большой теоретический интерес. Взаимодействие молекул обусловливает отклонение уравнения (40.1) от уравнения Менделеева—Клапейрона, справедливого для идеальных газов. По величине и характеру этих отклонений можно судить о количественных закономерностях, характеризующих молекулярные силы.

С другой стороны, знание уравнения состояния реального газа позволяет предсказывать и рассчитывать технические процессы, происходящие при высоких давлениях или низких температурах газа. Особый интерес и широкое практическое применение имеют процессы, связанные с такими изменениями агрегатного состояния, как сжижение газов, испарение и кипение жидкостей. Для изучения последних процессов целесообразно получить такую математическую запись уравнения состояния, при которой оно охватывало бы область всех возможных состояний системы от идеального газа до жидкости включительно, хотя бы даже ценой меньшей точности в каждой из областей.

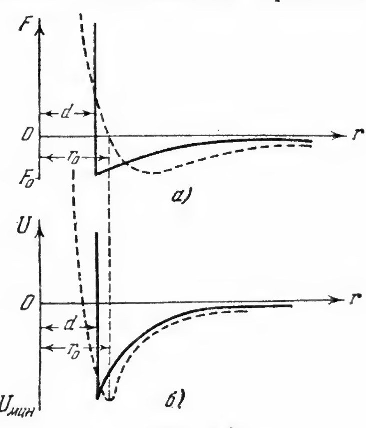


Рис. 3.6.

Удачное приближенное решение указанной задачи было получено в 1873 г. голландским физиком ван-дер-Ваальсом, спустя всего 4 года после опытов Эндрюса. Выведенное ван-дер-Ваальсом теоретическое уравнение состояния реального газа соответствует некоторому упрощению истинной картины взаимодействия молекул, приведенной выше, на рис. 3.2. Ввиду очень резкого возрастания сил отталкивания между молекулами при их соприкосновении электронные оболочки молекул можно приближенно считать практически недеформируемыми, а сами молекулы заменить абсолютно непроницаемыми сферами диаметра $d \approx r_0$. При этом на расстояниях между центрами молекул r, меньших d, следует считать силы отталкивания F и их энергию U бесконечно большими, как это изображено на рис. 3.6.

Для сравнения на том же рисунке пунктиром нанесены истинные кривые зависимости F и U от r. Как видно из этого сопоставления, приближенные кривые в основном правильно передают

картину взаимодействия молекул, за исключением небольшого участка вблизи $r = r_0$.

В использованном ван-дер-Ваальсом приближении действие сил отталкивания заменено «непроницаемостью» молекул. Благодаря этому получается, что при соприкосновении молекул друг с другом силы взаимодействия не обращаются в нуль, как это следует из правильной картины ($F = 0$ при $r = r_0$), а в этот момент между молекулами словно еще действуют весьма значительные силы притяжения F_0 и молекулы сильно давят друг на друга. В действительности же силы притяжения действуют между молекулами лишь на расстояниях, *бо́льших* r_0.

Различие это весьма существенно. В приближении ван-дер-Ваальса при $r = r_0$ силы притяжения между молекулами достигают *наибольшего* значения. На самом же деле при $r = r_0$ силы взаимодействия между молекулами *обращаются в нуль*.

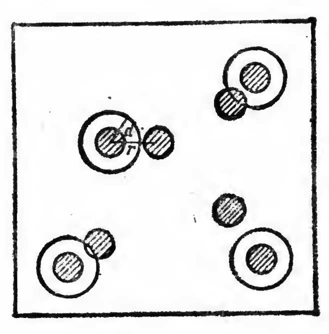


Рис. 3.7.

Забвение чисто фиктивного характера силы F_0, появление которой обусловлено принятой приближенной моделью, непригодной на малых расстояниях, привело впоследствии к физически неверным утверждениям о наличии в жидкости (где молекулы расположены в непосредственной близости друг к другу) огромных сил так называемого «внутреннего» или «молекулярного» давления молекул друг на друга, оценивавшегося в десятки тысяч атмосфер.

Отделив несколько искусственным путем действие сил притяжения от сил отталкивания, ван-дер-Ваальс предложил ввести для реальных газов две поправки к уравнению Менделеева — Клапейрона.

а) Поправка на недоступный объем (непроницаемость молекул, приближенно заменяющая точную картину сил отталкивания).

Молекула идеального газа, заключенного в некотором сосуде, может находиться в любой его точке, и для нее доступен весь объем сосуда V. Молекула реального газа не может находиться в тех местах сосуда, где расположены остальные $N - 1$ молекул, и ей доступна лишь часть всего объема, равная $V - b$. Для подсчета недоступного объема b будем считать газ не слишком плотным, так что вероятностью тройных соударений молекул можно практически пренебречь. Для каждой пары взаимодействующих молекул недоступной является та часть объема, в которой расстояние между их центрами равно d, т. е. сфера с объемом $^4/_3\,\pi d^3$ (рис. 3.7). Из N молекул может быть образовано $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$ пар. Следователь-

но, полный недоступный объем для всех молекул $\frac{N(N-1)}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi d^3\approx$ $=N^2\cdot\frac{4}{6}\pi d^3$, и на каждую из них приходится:

$$b=\frac{4/6\pi d^3N^2}{N}=4N\cdot\frac{1}{6}\pi d^3. \qquad (40.2)$$

С учетом введенной поправки уравнение состояния реального газа примет вид

$$p=\frac{M}{\mu}\frac{RT}{V-b}, \qquad (40.3)$$

где согласно (40.2) недоступный объем b равен учетверенному объему всех молекул газа в сосуде.

Уравнение (40.3) является математическим оформлением изложенных в предыдущем параграфе идей М. В. Ломоносова. Изотермы ($T=\text{const}$) этого уравнения состояния

$$p(V-b)=\text{const} \qquad (40.4)$$

имеют вид гипербол, у которых давление безгранично возрастает при $V\to b$ (рис. 3.8). Уравнение (40.3) должно хорошо оправдываться на опыте при температурах много выше критической, когда взаимодействием между молекулами (притяжением) можно пренебрегать вплоть до момента столкновения их друг с другом.

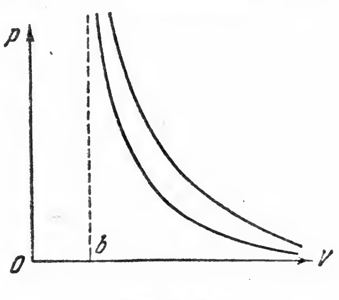


Рис. 3.8.

б) Поправка на «внутреннее давление» (правильнее говоря, на влияние сил межмолекулярного притяжения).

Как мы видели выше, в гл. VI, сила давления газа на стенку сосуда есть результат многочисленных столкновений молекул с твердой поверхностью. Поэтому давление идеального газа прямо пропорционально концентрации молекул $n=N/V$ в слое I, непосредственно прилегающем к стенке (рис. 3.9). Вследствие притяжения ударяющих о стенку молекул всеми остальными молекулами газа это давление уменьшается на некоторую величину p'. Поскольку силы взаимодействия молекул очень быстро убывают с расстоянием, то практически следует учитывать притяжение первого слоя лишь одним соседним слоем II. Сила этого притяжения (рассчитанная на единицу площади) пропорциональна концентрации молекул в обоих слоях, т. е.

$$p'\sim\frac{N}{V}\frac{N}{V}. \qquad (40.5)$$

Вводя коэффициенты пропорциональности, можно перейти от (40.5) к равенству

$$p' = \alpha \frac{N^2}{V^2} = \frac{a}{V^2}, \tag{40.6}$$

где множители α и $a = \alpha N^2$ зависят от конкретного строения взаимодействующих молекул, т. е. от природы газа.

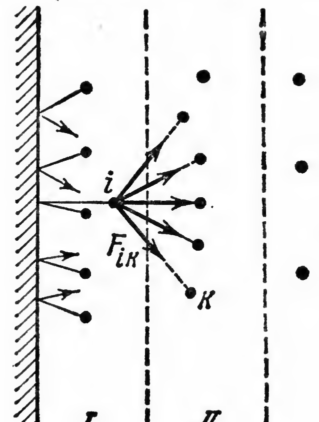


Рис. 3.9.

Объединяя вторую поправку с первой, мы можем написать:

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V-b} - p'. \tag{40.7}$$

Подставляя сюда величину p' из (40.6), получаем, что

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \tag{40.8}$$

или

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \frac{M}{\mu} RT. \tag{40.9}$$

Уравнение (40.9) носит название **уравнения ван-дер-Ваальса**.

Из приведенного вывода уравнения ван-дер-Ваальса следует, что постоянная b пропорциональна числу молей газа в данном объеме, а постоянная a пропорциональна квадрату числа молей.

Поскольку при выводе уравнения (40.8) был сделан целый ряд упрощений и пренебрежений, на него следует смотреть как на приближенное уравнение состояния реального газа. Это уравнение должно хорошо описывать качественную картину изменения состояния реального газа, но от него нельзя требовать слишком высокой точности количественных результатов. Для получения более точных значений давления p следует величины a и b считать не постоянными, а довольно сложными функциями температуры и плотности, или (что то же самое) в правую часть уравнения (40.8) добавить ряд слагаемых, содержащих дополнительные константы. Предложено большое число таких уравнений, в частности уравнение Битти и Бриджмена:

$$p = \frac{RT}{V^2}\left[V + B_0\left(1 - \frac{b}{V}\right)\right]\left[1 - \frac{c}{VT^n}\right] - \frac{A_0}{V^2}\left(1 - \frac{a}{V}\right), \tag{40.10}$$

пригодное для очень высоких давлений, но содержащее шесть эмпирических констант a, b, c, A_0, B_0, n, и еще более сложное уравнение Вукаловича для водяного пара.

Приводя все члены уравнения ван-дер-Ваальса (40.9) к общему знаменателю, мы можем преобразовать его к виду

$$pV^3 - \left(pb + \frac{M}{\mu} RT\right) V^2 + aV - ab = 0. \qquad (40.11)$$

Это — уравнение третьей степени относительно объема V, и, следовательно, при данных p и T оно может иметь или три вещественных корня или один вещественный и два комплексно-сопряженных корня, не имеющих физического смысла. При высоких температурах второе слагаемое в правой части уравнения (40.8) a/V^2 пренебрежимо мало по сравнению с первым $\frac{RT}{V-b}$, и изотермы (T = const) имеют лишь одно вещественное значение объема V, как это было изображено на рис. 3.8.

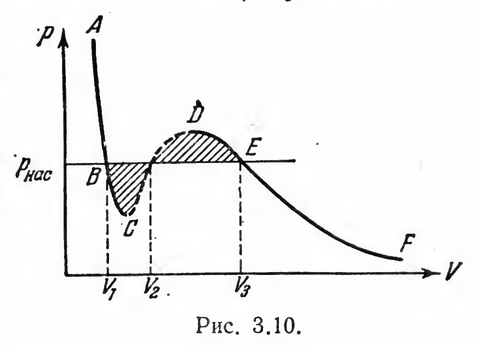


Рис. 3.10.

При низких температурах уже нельзя пренебрегать поправкой на силы притяжения a/V^2, и уравнение (40.11) имеет три вещественных корня, как это показано на рис. 3.10. Меньший из этих корней (V_1) соответствует состоянию с большой плотностью и малой сжимаемостью — состоянию жидкости. Изотерма ABC здесь круто растет, и для небольшого уменьшения объема необходимо сильное повышение давления.

Больший из трех корней (V_3) соответствует состоянию с низкой плотностью и легкой сжимаемостью — состоянию газа. Изотерма DEF идет здесь сравнительно полóго, объем и давление газа почти обратно пропорциональны.

Промежуточный корень (V_2) лежит на возрастающей ветви CD изотермы, изображенной на рис. 3.10 пунктиром, и соответствует абсолютно неустойчивым состояниям.

Такие состояния возможно осуществить лишь на очень короткий промежуток времени. Малейшее сжатие такой системы на участке CD приводит не к возрастанию давления, как на участке жидкости ABC или газа, а к *падению* давления. Система не противодействует уменьшению своего объема, а как бы помогает этому, самопроизвольно сжимаясь (результат действия молекулярных сил притяжения). При постоянном объеме одна часть системы сожмется до состояния жидкости, а остальная перейдет в пар, занимающий остальной объем.

Как видно, даже если отбросить пунктирный участок CD, теоретическая изотерма ван-дер-Ваальса не полностью совпадает

с опытной $ABEF$, имеющей горизонтальный участок BE, соответствующий смеси пара и жидкости. Детальный термодинамический анализ показывает, что состояние жидкости на участке BC и состояние пара на участке DE являются сравнительно неустойчивыми и могут быть осуществлены лишь при осторожном и постепенном изменении объема, при принятии ряда дополнительных предосторожностей, в частности при тщательной очистке испытуемого вещества от посторонних примесей. Положение точек B и E может быть найдено теоретически из условия равенства заштрихованных на рис. 3.10 площадок под и над изотермой в полном соответствии с данными опыта.

При больших давлениях на участке AB устойчивым является состояние жидкости. При малых давлениях на участке EF устойчивым является состояние ненасыщенного пара. При $p = p_{нас}$ жидкость и пар могут находиться одновременно в равновесии друг с другом, имея объемы, соответственно равные V_1 и V_3. Давление $p_{нас}$ соответствует упругости насыщенного пара.

На рис. 3.11 изображен ряд изотерм уравнения ван-дер-Ваальса, соответствующих различным температурам. С ростом T молярный объем жидкости, находящейся в равновесии с ее насыщенным

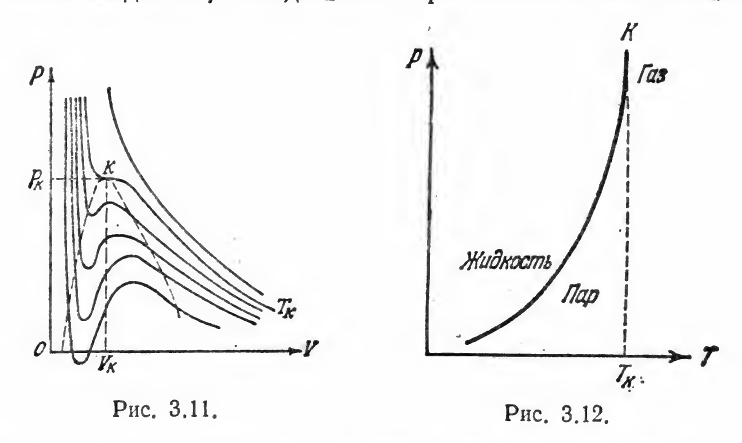


Рис. 3.11. Рис. 3.12.

паром, $V_1 = V_{жидк}$ возрастает, а молярный объем насыщенного пара $V_3 = V_{пар}$ уменьшается вследствие одновременного возрастания его упругости насыщения $p_{нас}(T)$.

При этом обе ветви пограничной кривой, изображенной на этом рисунке пунктиром, сближаются и при критической температуре T_k сливаются друг с другом.

На изотерме, соответствующей критической температуре T_k, точки B и E (см. рис. 3.10) сливаются в точке K. Исчезает прямой участок $B - E$, отвечающий расслоению фаз. С ростом давления газ целиком переходит в жидкость при $p = p_k$.

На изотермах, соответствующих температурам $T > T_k$, нет участков, отвечающих жидкой фазе. При любых давлениях вещество представляет собой газ. Кинетическая энергия его молекул больше $|U_{мин}|$ и переход вещества в жидкую фазу невозможен.

Значения $p_{нас}$ в функции температуры T показаны на графике рис. 3.12. С ростом температуры упругость насыщенного пара возрастает очень быстро, примерно по показательному закону. В точке K эта кривая обрывается.

Точка K на рис. 3.11 и 3.12, в которой состояния жидкости и пара совпадают, называется критической точкой. Соответствующие значения p_k и V_k носят названия критического давления и критического объема для данного вещества.

В критической точке все три корня уравнения (40.11) должны совпадать. Из этого условия можно получить:

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad V_k = 3b \quad \text{и} \quad \frac{p_k V_k}{RT_k} = \frac{3}{8} = 0{,}375. \qquad (40.12)$$

Как и само уравнение ван-дер-Ваальса, выведенные из него соотношения (40.12) являются сугубо приближенными. В нижеследующей таблице сопоставлены значения постоянных a и b и критических значений p_k, V_k и T_k для некоторых веществ.

Вещество	a, Н·м⁴/кмоль²	b, м³/кмоль	T_k, К	p_k, Н/м²	V_k, м³/кмоль	$\frac{V_k}{b}$	$\frac{p_k V_k}{RT_k}$
Гелий	$0{,}032 \cdot 10^5$	$23{,}4 \cdot 10^{-3}$	5,3	$2{,}26 \cdot 10^5$	$57{,}8 \cdot 10^{-3}$	2,47	0,301
Водород	$0{,}245 \cdot 10^5$	$26{,}6 \cdot 10^{-3}$	33,2	$12{,}8 \cdot 10^5$	$64{,}5 \cdot 10^{-3}$	2,42	0,303
Азот	$1{,}347 \cdot 10^5$	$38{,}6 \cdot 10^{-3}$	126,0	$33{,}5 \cdot 10^5$	$90{,}0 \cdot 10^{-3}$	2,33	0,298
Кислород	$1{,}36 \cdot 10^5$	$31{,}9 \cdot 10^{-3}$	144,3	$49{,}7 \cdot 10^5$	$74{,}0 \cdot 10^{-3}$	2,32	0,310
Водяной пар	$5{,}48 \cdot 10^5$	$30{,}6 \cdot 10^{-3}$	645,1	$217{,}7 \cdot 10^5$	$45{,}0 \cdot 10^{-3}$	1,47	0,184

Из таблицы видно, что особенно плохо выполняются соотношения $\frac{V_k}{b} = 3$ и $\frac{p_k V_k}{RT_k} = 0{,}375$. Качественная же картина изменения состояний вещества передается уравнением ван-дер-Ваальса вполне правильно. Наряду с устойчивыми состояниями оно предсказывает и правильно описывает также неустойчивые состояния перегретой жидкости и пересыщенного пара.

Из рис. 3.11 видно, что при низких температурах часть неустойчивых состояний может находиться при отрицательных давлениях. Подобные случаи растянутой жидкости при соответствующих условиях действительно могут быть осуществлены на опыте.

При выводе уравнения ван-дер-Ваальса мы рассматривали влияние сил взаимодействия на поведение реального газа как

малые поправки и пренебрегали более точным их учетом. Так, например, при учете влияния сил притяжения мы пренебрегали тройными столкновениями молекул и поправка записывалась в виде $\frac{a}{V^2}$, а не $\frac{a}{(V-b)^2}$. Поэтому уравнение (40.8) дает особенно большие отклонения на левых участках изотерм, соответствующих состоянию жидкости, и правильно передает лишь общую тенденцию этих участков — их большую крутизну.

Точный учет многократных взаимодействий молекул представляет огромные математические трудности. Эта статистическая задача была решена сравнительно недавно (в 1937 г.) различными методами Н. Н. Боголюбовым и И. Мейером. Полученные решения, к сожалению, имеют вид бесконечных рядов и практически малопригодны для технических расчетов.

§ 41. Сжижение газов

На рис. 3.13 изображен примерный ход изотерм для любого реального газа. Изотерма, соответствующая критической температуре T_k, и пограничная кривая, нанесенная на этом рисунке штрихпунктиром, разделяют pV-плоскость на четыре области: газ, жидкость, пар и смесь пара и жидкости.

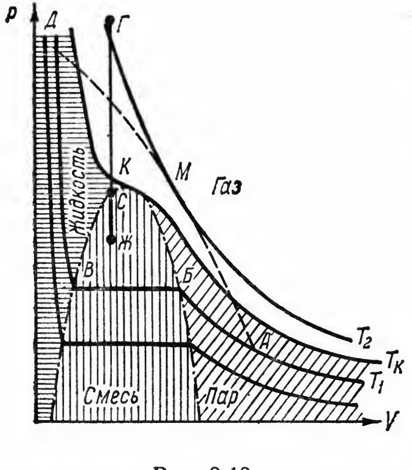


Рис. 3.13.

Газ с температурой T_1 ниже критической (ненасыщенный пар) при постепенном сжатии увеличивает свою упругость, как это изображено на рис. 3.13 на участке $АБ$. По достижении точки пересечения изотермы с пограничной кривой (точка $Б$) давление пара становится равным упругости насыщенного пара $p_{нас}(T_1)$. При дальнейшем уменьшении объема давление на участке $БВ$ остается постоянным и происходит переход все большей части вещества из парообразного состояния в жидкое. В точке $В$ весь пар превращается в жидкость, и далее на участке $ВД$ идет сжатие жидкости.

При температуре T_2 выше критической изотерма газа вся лежит выше пограничной кривой. При изотермическом сжатии газа его состояние изменяется непрерывно, и газ не превращается в жидкость. Даже при очень большой плотности, когда молекулы газа подходят почти вплотную друг к другу, кинетическая энергия их

хаотического теплового движения превышает величину $|U_{\text{мин}}|$ и не дает возможности длительного агрегирования молекул.

Ко второй половине XIX века целый ряд веществ, находящихся обычно в газообразном состоянии, удалось превратить в жидкость простым сжатием. Однако некоторые газы, в частности кислород и азот, являющиеся основными компонентами атмосферного воздуха, при этом в жидкое состояние не переходили. Возникло даже предположение, что жидкий кислород и жидкий азот вообще существовать не могут, и подобные вещества было предложено называть «постоянными газами».

Д. И. Менделеев, впервые введший понятие критической температуры, объяснил причину неудачи попыток сжижения так называемых «постоянных газов». Он предположил, что у этих газов критическая температура значительно ниже комнатной и, следовательно, для их сжижения необходимо предварительно понизить их температуру ниже T_k. И действительно, идя по этому пути, Кайете и Пикте в 1877 г. сжижили ряд «постоянных газов» (O_2, N_2, CO). В 1898 г. Дьюар получил жидкий водород, и, наконец, в 1908 г. Камерлинг-Оннес охладил до достаточно низкой температуры и превратил в жидкость последний «постоянный газ» — гелий.

Количественное определение критических параметров T_k, p_k и V_k представляет значительные трудности. Вернемся к опытам, описанным в предыдущем параграфе и схематически изображенным на рис. 3.4. Поместим в запаянную трубку некоторое количество газа при температуре $T_2 > T_k$ и достаточно высоком давлении p. На диаграмме рис. 3.13 его состояние изобразится некоторой точкой *Г*. Будем охлаждать этот газ. Тогда его состояние будет изменяться по изохоре *ГСЖ*.

При переходе через пограничную кривую в точке *С* система расслоится на две фазы. Поскольку точка *С* лежит на левой ветви пограничной кривой, то основная масса будет находиться в состоянии жидкости, и мениск, отделяющий жидкость от пара, расположится в верхней части трубки. По мере дальнейшего охлаждения (линия *СЖ*) состояние жидкости будет изменяться в соответствии с левой ветвью пограничной кривой, плотность жидкости будет возрастать, а объем уменьшаться, мениск будет опускаться, и объем, занимаемый паром, возрастать. Количество пара, однако, возрастает медленнее занимаемого им объема, так как с понижением температуры давление и плотность насыщенного пара понижаются. Поэтому при сильном охлаждении объем жидкости почти не меняется. При нагревании в соответствии с линией *ЖС* объем жидкости будет возрастать, пока она не заполнит всю трубку, как изображено на рис. 3.4, *б*.

Если объем исходного газа равен критическому V_k, то эта изохора пересечет пограничную кривую в самой ее верхней точке

K — критической точке, и мениск возникнет посередине трубки. Наблюдая за появлением и исчезновением в трубке границы раздела между двумя фазами и местом появления мениска, можно таким путем определить параметры критической точки T_k, p_k и V_k. Как показал А. Г. Столетов, этот метод может дать достаточно точные значения критической температуры и давления, но с его помощью довольно трудно определить точную величину V_k: в точке K пограничная кривая и критическая изотерма идут горизонтально, и небольшие изменения и неточности в определении p и T приводят к значительным погрешностям в оценке объема.

Широкое развитие в XIX веке паровых двигателей и поиски рабочих веществ, которые могли бы заменить в технике водяной пар, поставили задачу изучения термодинамических характеристик ряда газов и паров и, в первую очередь, определения их критических температур и давлений. Те же требования выдвигало и развитие холодильной техники и поиски наилучших рабочих веществ для холодильных установок. После основных работ Менделеева, Эндрюса и ван-дер-Ваальса в ряде физических лабораторий различных стран было предпринято широкое изучение критических параметров многих неорганических и органических соединений.

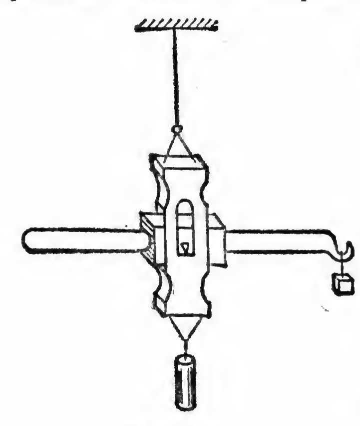


Рис. 3.14.

Ведущая роль в этих исследованиях в последней четверти XIX века принадлежала Киевской лаборатории проф. Авенариуса. Для изучения критических параметров окрашенных газов и веществ, обладающих большими критическими давлениями, молодым ученым Надеждиным был разработан оригинальный метод. Стеклянная или металлическая трубка устанавливалась на острие призмы и уравновешивалась в горизонтальном положении (рис. 3.14). Затем трубка заполнялась испытуемым веществом, запаивалась и помещалась в нагревательную печь. Пока температура была ниже критической, одно из колен трубки, в котором находилась жидкость, перевешивало.

Как только температура достигала T_k, двухфазная система (жидкость — пар) превращалась в однородную систему (газ) и трубка устанавливалась горизонтально. Таким путем была впервые определена критическая температура воды.

Следует подчеркнуть, что приведенная на рис. 3.13 изотерма $T = T_k$ отделяет области газа и пара лишь чисто условно. *Паром, или, точнее, ненасыщенным паром, мы называем газ, который*

может быть переведен в жидкость чисто изотермическим сжатием, причем переход из парообразного состояния в жидкое совершается *скачком*. При низких давлениях ненасыщенные пары ведут себя практически так же, как и идеальные газы, и подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона.

Если же при сжатии одновременно изменять и температуру, то переход из точки A в точку $Д$ может быть произведен без расслоения фаз. Подобный непрерывный переход из парообразного состояния в жидкое изображен на том же рис. 3.13 пунктиром по пути $АМД$. При этом на участке AM при сжатии газ нагревают до $T_2 > T_k$, а на участке $МД$ при дальнейшем сжатии охлаждают до первоначальной температуры T_1.

Столь же условной является и граница между областью газа и областью жидкости. Свойства сильно сжатых газов лишь количественно отличаются от свойств жидкости. Это особенно ярко проявляется в случае смесей нескольких веществ. Например, газы, близкие к идеальным, смешиваются друг с другом в любых отношениях. Те же вещества в жидком состоянии могут обладать ограниченной взаимной растворимостью. Так, если слить вместе воду и керосин, то такая система обязательно будет расслаиваться. Внизу будет расположен более тяжелый слой раствора ничтожного количества керосина в воде, а сверху расположится более легкий слой раствора ничтожного количества воды в керосине.

Изучая поведение сильно сжатых газовых смесей, И. Р. Кричевский обнаружил весьма интересное явление расслоения газовых смесей, т. е. реальные газы при достаточно высоких плотностях и давлениях также могут обладать ограниченной взаимной растворимостью, как и жидкости.

Как видно из диаграммы рис. 3.13, для сжижения газов их необходимо охлаждать до температуры ниже критической. Поэтому вещества с высокими значениями T_k (выше комнатной температуры) могут быть легко превращены в жидкость. Для веществ с низкими значениями T_k, например водорода ($T_k = -250$ °С), в нашем распоряжении нет естественных источников низких температур. Достаточно низкие температуры могут быть получены лишь искусственным путем. Для сжижения подобных газов их можно предварительно охладить не путем передачи тепла какому-либо более холодному телу (которого нет в нашем распоряжении), а заставляя совершать работу против внутренних или внешних сил.

Первый путь осуществляется в машине Линде, схема которой приведена на рис. 3.15. Компрессор K засасывает воздух и сжимает его до давления $\sim$200 атм. Поскольку при почти адиабатическом сжатии воздух нагревается, то его пропускают через холодильник X, охлаждаемый холодной проточной водой. При давлении 200 атм воздух является реальным газом, и в нем при обычных температурах преобладают силы притяжения, т. е. молекулы в среднем

находятся на расстояниях, близких к r_0, но превышающих это значение (см. рис. 3.2, *а*). Сжатый воздух из холодильника поступает в резервуар большого объема (так называемый р е с и в е р *Р*) для сглаживания толчков давления, создаваемых компрессором. Из ресивера воздух высокого давления проходит по внутренней трубе теплообменника *Т* и выпускается через кран с узким отверстием (д р о с с е л ь) *Д* в резервуар низкого давления. При резком падении давления после дросселя от 200 до 1 атм воздух расширяется, расстояние между молекулами увеличивается, а потенциальная энергия их взаимодействия возрастает. Увеличение потенциальной энергии совершается за счет уменьшения кинетической энергии хаотического движения молекул, т. е. за счет охлаждения газа.

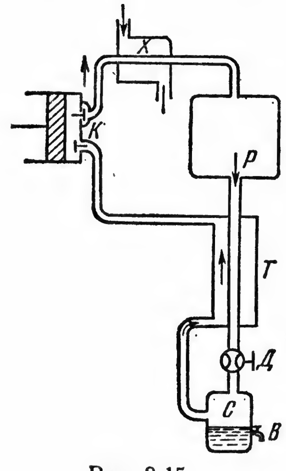


Рис. 3.15.

Вследствие сравнительно малой величины работы, совершенной против внутренних сил притяжения, однократного расширения недостаточно для снижения температуры до критической. Поэтому охлажденный воздух возвращается обратно по внешней трубе теплообменника в компрессор и, нагреваясь до комнатной температуры, охлаждает следующую порцию сжатого воздуха, идущего по внутренней трубе. Таким образом, следующая порция воздуха предварительно охлаждается, и при ее дальнейшем дросселировании температура после расширения падает до более низкого значения, чем у первой порции. Через 6—8 часов после запуска установки температура дросселированного воздуха снижается настолько, что часть его ($\sim 5 \div 6\%$) превращается в жидкость, а остальной поток продолжает возвращаться в теплообменник. Жидкий воздух, по мере его накопления в конденсаторе *С*, через кран *В* выливается в дьюаровские сосуды, предназначенные для его хранения и транспортировки.

Большая работа, затрачиваемая на предварительное сжатие газа, делает цикл Линде малоэкономичным. Поэтому в современных холодильных установках для сжижения газов последние совершают внешнюю работу и отдают свою энергию в специальных расширительных машинах, называемых д е т а н д е р а м и.

На рис. 3.16 изображена схема установки П. Л. Капицы с так называемым т у р б о д е т а н д е р о м. Компрессор *К* сжимает воздух всего до 5—6 атм. Сжатый воздух проходит через теплообменник *Т*, где предварительно охлаждается встречным потоком несжиженного воздуха. Далее поток разделяется на две части. Небольшая часть сжатого воздуха поступает непосредственно

в конденсатор C, а основной поток поступает в турбодетандер $Д$. В турбодетандере сжатый воздух ударяет о лопасти турбинки и, вращая последнюю, совершает работу. При этом его давление падает до атмосферного и температура снижается дополнительно на некоторую величину ΔT. Расширившийся и охлажденный воздух поступает в конденсатор C, поднимается по трубам вверх и затем выходит через теплообменник T наружу. Сжатый воздух, не прошедший через детандер, поступает в межтрубное пространство конденсатора, где охлаждается встречным потоком воздуха. При температуре, достигаемой в конденсаторе, упругость насыщенных паров воздуха превышает 1 атм, но менее 5 атм. Поэтому сжижается не основная масса воздуха, расширившаяся в детандере, а оставшийся сжатым воздух в межтрубном пространстве. Жидкий воздух перепускается через дроссель B в конденсатор. При уменьшении его давления часть жидкого воздуха испаряется и поднимается вверх, а вследствие затраты на это скрытой теплоты испарения оставшаяся жидкость охлаждается до температуры, при которой упругость насыщенных паров не превышает 1 атм.

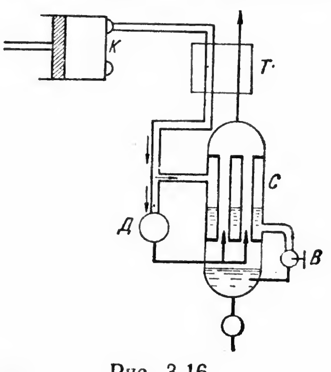


Рис. 3.16.

Жидкий воздух имеет при атмосферном давлении температуру —180 °C. При его испарении в первую очередь улетучивается азот и остается жидкий кислород. Таким путем можно отделить друг от друга основные составляющие атмосферного воздуха и использовать их для различных целей. Из чистых азота и водорода при повышенных давлениях на специальных катализаторах получают аммиак. Чистый кислород применяется в медицине, для автогенной сварки, для ускорения доменного процесса. Смешанный с органическими горючими жидкий кислород дает взрывчатые вещества, так называемые о к с и л и к в и т ы, применяемые в горнорудной промышленности.

ГЛАВА XI

СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

§ 42. Сцепление жидкостей. Испарение и кипение

Молекулы в жидкости расположены друг около друга на расстояниях порядка r_0 (см. рис. 3.2) и интенсивно взаимодействуют между собой. Силы их взаимодействия специфичны, т. е. существенно зависят от природы взаимодействующих молекул и сильно различаются по величине для разных жидкостей. Поэтому установление закономерностей, общих для всех жидкостей, т. е. построение теории жидкого состояния, представляет значительно бóльшие трудности, чем создание теории газов.

При увеличении внешнего давления на величину Δp объем жидкости уменьшается на некоторую величину $-\Delta V$. При этом между сближающимися молекулами возникают огромные силы отталкивания, так что уменьшение объема может составить лишь незначительную долю первоначального объема V. Поэтому изотермическая сжимаемость жидкости

$$\varkappa = \frac{-\Delta V/V}{\Delta p} \tag{42.1}$$

очень мала и составляет обычно $10^{-4} \div 10^{-5}$ атм$^{-1}$ $\approx 10^{-9} \div 10^{-10}$ м^2/Н. Иными словами, при увеличении внешнего давления на 1 атм объем жидкости уменьшается на $10^{-4} \div 10^{-5}$ своего первоначального значения. Для заметного изменения объема жидкости необходимы давления в десятки и даже сотни тысяч атмосфер.

Сравнительно мало меняют свой объем жидкости и при нагревании. Термический коэффициент расширения жидкости

$$\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta t} \tag{42.2}$$

имеет порядок 10^{-4} К$^{-1}$, т. е. в десятки раз меньше, чем для газов. Поэтому в отличие от газов работа изобарического расширения при нагревании жидкости на 1К относительно мала:

$$p\,\Delta V \ll R\,\Delta T. \tag{42.3}$$

Следовательно, теплоемкости жидкости при постоянном объеме и постоянном давлении близки друг другу:

$$C_p - C_V = \frac{p\,\Delta V}{\Delta T} \ll C_p \quad \text{и} \quad C_V \approx C_p. \tag{42.4}$$

Величины $\varkappa$ и β различны для разных жидкостей, непостоянны и являются сложными функциями давления и температуры. Для воды, например, в интервале от 0 до 4 °С наблюдается аномалия: при нагревании происходит уменьшение объема, т. е. величина β становится отрицательной.

Д. И. Менделеев в 1884 г. предложил очень простую приближенную формулу для нахождения объема жидкости V_t при температуре t, если известен ее объем V_0 при температуре 0 °С:

$$V_t = \frac{V_0}{1 - kt}. \tag{42.5}$$

Коэффициент k, различный для разных жидкостей, Менделеев назвал *определителем расширения жидкости*. Из (42.5) следует, что плотность жидкости $\rho = 1/V$ изменяется с температурой по закону

$$\rho_t = \rho_0 (1 - kt), \tag{42.6}$$

т. е. линейно уменьшается. При $t = 1/k$ плотность жидкости по этой формуле должна обратиться в нуль. Однако уже при значительно более низких температурах жидкость превращается в газ. Поскольку плотность жидкости очень мало меняется с изменением давления, то на уравнения (42.5) и (42.6) следует смотреть как на хорошие приближения для уравнения состояния жидкости.

Характер теплового движения молекул в жидкости существенно отличается от теплового движения молекул газа. Поскольку средние расстояния $\bar{r}$ между молекулами в жидкости близки к r_0, отвечающему минимальному значению потенциальной энергии взаимодействия, т. е. равновесию (см. рис. 3.2), то молекулы бóльшую часть времени колеблются около своих положений равновесия. В силу хаотичности теплового движения скорости и амплитуды колебаний соседних молекул различны, и время от времени соседние молекулы расходятся друг от друга настолько, что отдельные молекулы перескакивают на расстояние порядка d, «застревают» в новых положениях равновесия и начинают колебаться около них. С ростом температуры растет средняя энергия теплового движения, а с ней и амплитуда колебаний и частота перескоков молекул из одного положения равновесия в соседние. При этом жидкость «разрыхляется», т. е. при нагревании объем ее возрастает.

Указанные особенности жидкости, своеобразный характер теплового движения ее молекул объясняют качественно и количественно целый ряд свойств и характеристик жидкостей. Огромные заслуги в области создания теории жидкостей и объяснения их свойств, обусловленных молекулярным строением, принадлежат советскому ученому Я. И. Френкелю. Некоторые результаты его исследований по механизму движения и взаимодействия молекул в жидкости и твердом теле излагаются в этой и следующей главах.

Поскольку в жидкости $\bar{r}$ близко к r_0, то потенциальная энергия взаимодействия соседних молекул близка к величине $U_{мин}$, изображенной на рис. 3.2. При плотной упаковке молекул каждая из них окружена 12 ближайшими соседями (рис. 3.17), и ее потенциальная энергия внутри жидкости приближенно равна

$$U_ж = 12U_{мин}. \qquad (42.7)$$

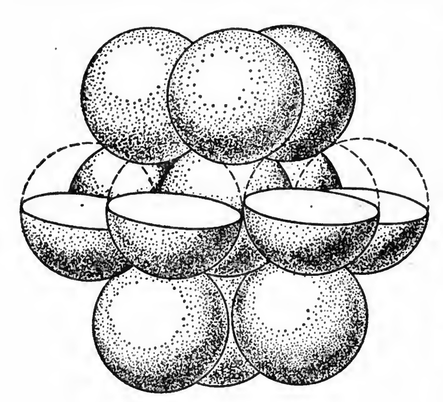


Рис. 3.17.

Так как силы взаимодействия между молекулами очень быстро убывают с расстоянием между ними, то при приближенном подсчете величины $U_ж$ можно практически пренебречь взаимодействием данной молекулы со всеми остальными, удаленными от нее на расстояния бо́льшие, чем $\bar{r}$, за исключением ближайших 12.

Как указывалось в предыдущей главе, над поверхностью жидкости находится насыщенный пар. При не слишком высоких упругостях насыщенного пара расстояния между молекулами в паре велики по сравнению с их диаметрами, и потенциальная энергия молекулы в паре практически равна нулю:

$$U_п \approx 0. \qquad (42.8)$$

Поскольку $U_{мин} < 0$, то и $U_ж < 0$ и, следовательно,

$$U_ж < U_п, \qquad (42.9)$$

т. е. потенциальная энергия молекулы внутри жидкости меньше, чем потенциальная энергия той же молекулы в паре.

Мы можем здесь провести полную аналогию с потенциальной энергией тела, находящегося на поверхности земли в поле тяжести, и того же тела, лежащего в яме (рис. 3.18, *а*). Отсчитывая высоту z от уровня земли, можно написать, что на поверхности земли

($z=0$) потенциальная энергия тела массы m равна

$$U_з = mgz = 0,$$

а в яме ($z<0$)

$$U_я = mgz < 0,$$

и, следовательно,

$$U_я < U_з.$$

И на поверхности земли, и в яме тело находится в равновесии под действием приложенных к нему сил (веса и реакции опоры). Однако, если поднимать тело из ямы на поверхность земли, то придется совершить работу против сил тяжести, действующих на этом пути:

$$\Delta A' = -F\,\Delta z = \Delta U = U_з - U_я = 0 - U_я = |U_я|, \quad (42.10)$$

равную «глубине» потенциальной ямы (рис. 3.18, *б*).

Рис. 3.18.

Аналогично молекула, расположенная внутри жидкости, находится в равновесии с соседями. Однако при переходе этой молекулы в пар необходима затрата работы на преодоление сил сцепления ее с окружающими соседями:

$$A' = -\sum_{\bar{r}}^{\infty} F\,\Delta z = \Delta U = U_п - U_ж = 0 - U_ж = |U_ж| \approx 12\,|U_{мин}|. \quad (42.11)$$

Следовательно, на испарение 1 моля, т. е. N_0 молекул жидкости, необходимо затратить работу

$$q' = N_0 A' = N_0 (U_п - U_ж) \approx 12 N_0 |U_{мин}| \quad (42.12)$$

на преодоление внутренних сил сцепления между молекулами, т. е. на разрыв связей между ними.

Поскольку молярный объем жидкости $v_ж$ меньше, чем молярный объем пара $v_п$, то при испарении будет происходить расширение вещества, что связано с добавочной работой расширения против сил внешнего давления

$$q_a = p\,\Delta v = p_{нас}(v_п - v_ж). \quad (42.13)$$

Таким образом, полная работа, производимая при испарении 1 моля жидкости, равна

$$q = q' + q_a = N_0 (U_п - U_ж) + p_н (v_п - v_ж). \quad (42.14)$$

При испарении жидкости необходимую для этого энергию подводят в виде тепла. Поскольку температура вещества при этом не меняется, величину q называют **скрытой теплотой испарения** жидкости. В зависимости от того, на какое количество вещества она рассчитывается, различают q молярное (Дж/кмоль) и q удельное (Дж/кг). Легко видеть, что

$$q_{\text{мол}} = \mu q_{\text{уд}}, \tag{42.15}$$

где μ — молекулярный вес вещества (кг/кмоль).

Величины q', q_a и q являются функциями температуры испарения. Как мы видели в предыдущей главе, по мере повышения температуры растет $v_ж$, а $v_п$ убывает, и свойства жидкости и ее насыщенного пара сближаются. С увеличением плотности насыщенного пара расстояние между его молекулами уменьшается, потенциальная энергия $U_п$ становится отличной от нуля и стремится к $U_ж$. В критической точке, т. е. при критической температуре T_k

$$v_п = v_ж \quad \text{и} \quad U_п = U_ж, \tag{42.16}$$

а следовательно, в этой точке

$$q' = 0, \quad q_a = 0 \quad \text{и} \quad q = 0. \tag{42.17}$$

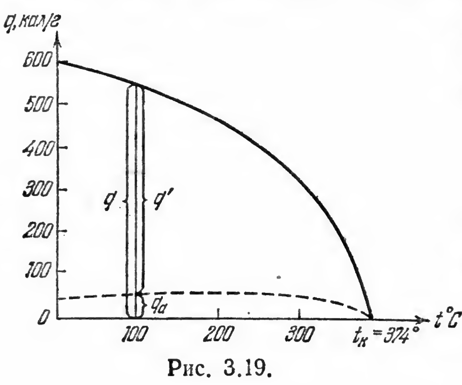


Рис. 3.19.

Так как при этой температуре исчезает разница между жидкостью и паром, то при $T = T_k$ скрытая теплота испарения должна обращаться в нуль. При $T < T_k$, по мере уменьшения температуры, возрастает разница между свойствами и строением пара и жидкости, а вместе с тем возрастает и скрытая теплота испарения q. Для примера на рис. 3.19 приведен график зависимости q от T для воды. Пунктиром на этом рисунке изображена зависимость q_a от T. Поскольку с ростом температуры $p_{\text{нас}}(T)$ растет, а $v_п - v_ж$ убывает, то величина q_a имеет максимум. На общем ходе изменения величины $q = q' + q_a$ с изменением температуры наличие этого максимума не сказывается, так как при всех температурах работа преодоления сил сцепления в жидкости q' много больше работы расширения против сил внешнего давления q_a. Поэтому *полная скрытая теплота испарения q монотонно падает с ростом температуры.*

Для воды при 0 °С упругость насыщенного пара составляет всего 4,6 мм рт. ст. При таком давлении насыщенный водяной пар является практически идеальным газом, и в нем $U_п \approx 0$. Внутренняя скрытая теплота испарения воды q' составляет 564 кал/г, или

$564 \cdot 18 \approx 10\,000$ кал/моль $\approx 4 \cdot 10^7$ Дж/кмоль. Из (42.12) тогда можно оценить:

$$|U_{\text{мин}}| = \frac{4 \cdot 10^7}{12 \cdot 6 \cdot 10^{26}} = 5{,}5 \cdot 10^{-21} \text{ Дж},$$

что несколько превышает среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы движения в направлении, перпендикулярном границе жидкости:

$$^1/_2 kT = {}^1/_2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot 273 \text{ К} = 2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

При наличии свободной поверхности жидкости отдельные молекулы, случайно обладающие избытком кинетической энергии, будут вырываться наружу. Жидкость будет постепенно испаряться. Средняя энергия молекул, оставшихся внутри жидкости, при этом понижается, и жидкость будет охлаждаться, если к ней не подводится тепло извне. На этом основана защитная реакция нашего организма при жаре. Выделяющийся в этом случае пот испаряется и охлаждает тело. Подобное испарительное охлаждение широко применяется в различных отраслях техники, например в так называемых *градирнях*.

По мере возрастания упругости пара, находящегося над жидкостью, все большее число отдельных хаотически движущихся молекул пара будет попадать на поверхность жидкости и присоединяться к последней. При

$$p_{\text{п}} = p_{\text{нас}}(T) \tag{42.18}$$

скорость испарения жидкости и скорость обратной конденсации пара сравняются и между жидкостью и паром установится *динамическое равновесие*. Дальнейшее испарение жидкости станет возможным, если образовавшийся непосредственно над ее поверхностью насыщенный пар сдувать, откачивать насосом или конденсировать на другой, более холодной поверхности.

Чем выше температура, тем легче и интенсивнее идет испарение жидкости и тем больше упругость насыщенного пара $p_{\text{нас}}(T)$, при которой наступает динамическое равновесие.

Наряду с поверхностным испарением жидкости возможно и объемное ее испарение, т. е. интенсивное образование пузырьков пара во всем объеме жидкости — кипение. Если упругость насыщенного пара при данной температуре $p_{\text{нас}}(T)$ меньше, чем внешнее давление $p_{\text{внешн}}$, то кипение невозможно. Образовавшийся случайно внутри жидкости пузырек насыщенного пара будет сжиматься внешним давлением, и так как давление в нем не может возрасти выше $p_{\text{нас}}$, то весь пар в нем сконденсируется обратно в жидкость.

Условие наступления кипения

$$p_{\text{нас}}(T) = p_{\text{внешн}}, \tag{42.19}$$

при выполнении которого образующиеся в объеме жидкости пузырьки становятся устойчивыми, может быть достигнуто двумя путями:

1) нагреванием жидкости до такой температуры $T_{кип}$, при которой упругость насыщенного пара станет равной внешнему давлению. Условие

$$p_{нас}(T_{кип}) = p_{внешн} \tag{42.20}$$

определяет тогда температуру кипения $T_{кип}$ в зависимости от внешнего давления;

2) понижением внешнего давления до величины упругости насыщенного пара при данной температуре. Если вода находится в закрытом сосуде, то, уменьшив давление воздуха над водой до 17,5 мм рт. ст., можно заставить воду закипеть при температуре 20 °С вместо 100 °С при атмосферном давлении. На вершине Эльбруса ($\sim$5000 м) давление воздуха составляет $\sim$0,5 атм и вода закипает при температуре 82 °С.

Практически образование пузырьков в жидкости несколько затруднено из-за наличия поверхностного натяжения (см. § 43 и 44) и требует небольшого перегрева выше температуры, определяемой из уравнения (42.20). Такой перегрев всегда имеет место у более горячих стенок сосуда, в котором происходит кипение жидкости. Поэтому пузырьки пара в первую очередь образуются на стенках и на дне подогреваемого сосуда с жидкостью.

§ 43. Поверхностное натяжение жидкости

Жидкости, так же как и твердые тела, обладают большой объемной упругостью, т. е. сопротивляются изменению своего объема, но, как и газы, не обладают упругостью формы. Жидкость, налитая в сосуд, заполняет его и принимает форму сосуда. Действие силы тяжести прижимает жидкость ко дну сосуда, а свободная поверхность жидкости устанавливается горизонтально. Над поверхностью жидкости находятся насыщенный пар и газообразный воздух. Таким образом, объем жидкости оказывается ограниченным стенками сосуда и газом. При этом условия, в которых молекулы жидкости находятся на границах раздела, будут отличаться от условий внутри объема жидкости.

Рассмотрим первоначально молекулы, находящиеся в поверхностном слое свободной поверхности жидкости, т. е. на границе жидкость — газ. Легко понять (рис. 3.20), что такая молекула имеет в среднем только шесть ближайших соседей, а не 12. Поэтому ее потенциальная энергия примерно равна

$$U_{пов} \approx 6U_{мин} \tag{43.1}$$

и выше, чем потенциальная энергия той же молекулы внутри жидкости, $U_ж \approx 12U_{мин}$ (так как $U_{мин} < 0$, см. рис. 3.21). Поэтому для извлечения молекулы изнутри жидкости на ее свободную поверхность надо затратить внешнюю работу

$$A = U_{пов} - U_ж \approx 6U_{мин} - 12U_{мин} = -6U_{мин} = 6\,|U_{мин}|. \quad (43.2)$$

При обратном переходе молекулы из поверхностного слоя жидкости внутрь объема ее потенциальная энергия будет уменьшаться на ту же величину $\approx 6\,|U_{мин}|$. Как тело в поле тяжести стремится занять наинизшее положение с наименьшей потенциальной энергией (если ему в этом не препятствуют другие силы), так и молекулы, находящиеся на свободной поверхности жидкости, будут

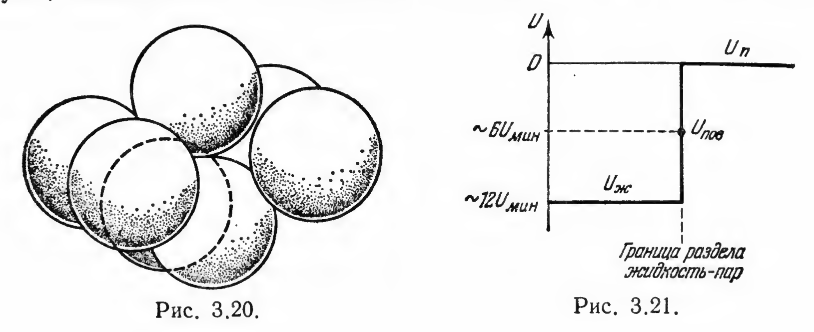


Рис. 3.20. Рис. 3.21.

стремиться перейти внутрь ее объема. Поскольку число молекул на поверхности жидкости пропорционально величине свободной поверхности, то стремление молекул поверхности втянуться внутрь объема жидкости означает, другими словами, стремление сократить свободную поверхность жидкости.

Таким образом, мы приходим к выводу, подтверждаемому на опыте, что *жидкость под действием внутренних сил стремится уменьшить свою свободную поверхность, если ей в этом не препятствуют какие-либо силы.* И действительно, когда в кабине космического корабля наступает невесомость, то свободный объем жидкости принимает форму шара, так как шар обладает наименьшей поверхностью при заданном объеме.

Потенциальная энергия жидкости в поле тяжести пропорциональна ее массе, т. е. полному числу молекул N или объему жидкости V. Избыточная потенциальная энергия поверхностных молекул жидкости пропорциональна поверхности жидкости S. Отношение V/S пропорционально линейным размерам тела и растет с увеличением его объема и массы.

Для больших масс жидкости (V/S велико!) основную роль играет не поверхностная энергия ($\sim S$), а энергия в поле тяжести («объемная» энергия, $\sim V$). Жидкость, налитая в сосуд, принимает такую

форму, при которой центр ее массы имеет наинизшее положение; ртуть, налитая в плоский сосуд, растекается по его дну. В то же время маленькая капелька ртути принимает форму шарика: ее потенциальная энергия в поле тяготения также уменьшилась бы при растекании по столу, но здесь превалирующую роль играет энергия свободной поверхности (V/S мало). Сплющивая капельку ртути, мы производим работу, затрачиваемую на «вытягивание» новых молекул из объема на ее поверхность (возрастающую при сплющивании).

Влияние «поверхностной» энергии существенно также для тонких жидких пленок.

Возьмем проволочный каркас с подвижным ребром, изображенный на рис. 3.22, и окунем его в мыльную воду. При осторожном извлечении каркаса из раствора в нем останется натянутой тончайшая мыльная пленка. Передвинем теперь нижнее подвижное ребро на некоторое расстояние Δx, как это показано на рис. 3.22 пунктиром. При этом слой жидкости на каркасе растянется и несколько утончится, а его полная поверхность (с обеих сторон каркаса) увеличится на

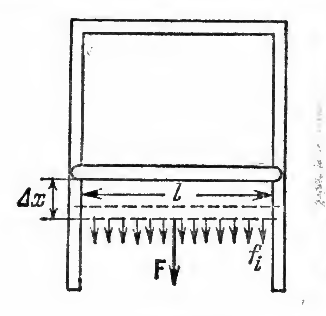


Рис. 3.22.

$$\Delta S = 2l\,\Delta x. \tag{43.3}$$

Если обозначить через n_0 число молекул, заполняющих единицу площади поверхности пленки, то при таком ее растяжении $n_0\Delta S$ молекул перейдут из объема жидкого слоя на его поверхность. Поскольку извлечение одной молекулы на свободную поверхность связано с увеличением ее потенциальной энергии на $\approx 6\,|U_{\text{мин}}|$, то для растяжения мыльной пленки придется затратить внешнюю работу

$$\Delta A = 6\,|U_{\text{мин}}|\,n_0\,\Delta S = \alpha\,\Delta S. \tag{43.4}$$

Величина $\alpha \approx 6\,|U_{\text{мин}}|\,n_0$ называется коэффициентом поверхностного натяжения, или просто поверхностным натяжением данной жидкости. Из (43.4) вытекает, что

$$\alpha = \frac{\Delta A}{\Delta S} \tag{43.5}$$

и $\alpha = \Delta A$ при $\Delta S = 1$. Следовательно, *коэффициент поверхностного натяжения α численно равен работе, которую нужно затратить для увеличения поверхности жидкости на единицу площади*. В системе СГС величина α измеряется в эрг/см^2, в СИ — в Дж/м^2.

Отпустим подвижное ребро рассматриваемого каркаса и дадим ему возвратиться в исходное положение. Тогда молекулы, вышедшие на поверхность, вернутся обратно внутрь жидкости и внутренние силы сцепления совершат точно такую же работу $\Delta A = \alpha\,\Delta S$. Микроскопическая картина сил, действующих на каждую отдельную молекулу, при таком перемещении будет весьма сложной и запутанной. Макроскопически это проявится в том, что на свободное ребро каркаса действует по всей линии соприкосновения его с поверхностью жидкости (длиной $2l$) результирующая сила $F = \sum f_i$, называемая **силой поверхностного натяжения** жидкости. Эта сила направлена касательно к поверхности жидкости и перпендикулярна к контуру, ограничивающему поверхность жидкости, т. е. в данном случае к линии соприкосновения поверхности жидкости с любым ребром каркаса, в том числе и подвижным.

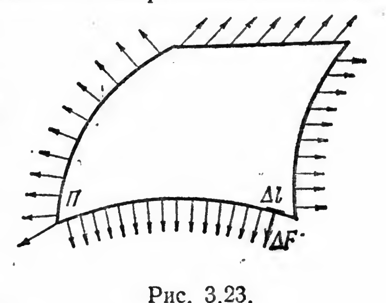


Рис. 3.23.

При перемещении подвижного ребра каркаса на величину Δx эта сила поверхностного натяжения совершает работу

$$\Delta A = F\,\Delta x. \tag{43.6}$$

Сравнивая полученные два выражения (43.4) и (43.6) для работы и учитывая (43.3), найдем:

$$\alpha \cdot 2l\,\Delta x = F\,\Delta x,$$

откуда

$$\alpha = \frac{F}{2l}, \tag{43.7}$$

т. е. $\alpha = F$ при $2l = 1$. Формула (43.7) дает нам второе определение коэффициента поверхностного натяжения (вытекающее из первого): *коэффициент поверхностного натяжения численно равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность*. В системе СГС он измеряется в дин/см (что совпадает с предыдущим определением, так как эрг = дин · см), в СИ — в Н/м.

Выделим мысленно на поверхности жидкости площадку, ограниченную контуром Π (рис. 3.23). Молекулы стремятся уйти внутрь жидкости с поверхности этой площадки, а площадка — сократиться. Поскольку пленка находится в равновесии, значит, на нее со стороны остальной поверхности действуют макроскопические растягивающие силы, так что к каждому элементу контура Δl приложена сила поверхностного натяжения

$$\Delta F = \alpha\,\Delta l. \tag{43.8}$$

Как указывалось выше, сила $\Delta\mathbf{F}$ перпендикулярна к элементу контура Δl и лежит в плоскости, касательной к поверхности. Из (43.4) следует, что α представляет собой избыточную потенциальную энергию единицы площади поверхности жидкости. При переходе молекул с поверхности жидкости внутрь и обратно изменяется и кинетическая энергия их хаотического теплового движения. Следовательно, быстро сжимающаяся пленка будет нагреваться, а быстро растягивающаяся пленка — охлаждаться. Поэтому соотношения (43.5) и (43.7), строго говоря, являются справедливыми лишь при достаточно медленных изотермических процессах. Величина α, входящая в эти выражения, носит название свободной энергии единицы площади поверхности.

Особые свойства поверхностного слоя и наличие в нем сил поверхностного натяжения обусловливают целый ряд своеобразных явлений. Если осторожно положить на поверхность жидкости стальную иголку или лезвие безопасной бритвы, то под действием ее веса поверхность в этом месте «прогнется» (рис. 3.24). При этом

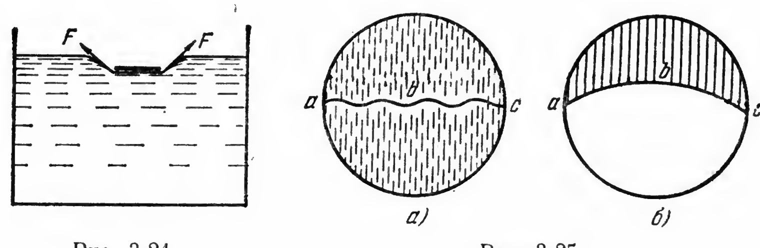


Рис. 3.24. Рис. 3.25.

площадь поверхности возрастает и силы поверхностного натяжения не дадут телу опускаться далее. Если пленка жидкости натянута на проволочный каркас, изображенный на рис. 3.25, *а*, то нить *abc*, прикрепленная к каркасу, лежит на поверхности пленки свободно. Если же нижнюю половину пленки проткнуть, то оставшаяся верхняя ее половина будет стремиться сжаться и натянет нить, как это показано на рис. 3.25, *б*.

Если давление газа или пара над свободной поверхностью жидкости мало превышает атмосферное, то газ можно считать идеальным газом и пренебрегать его взаимодействием с молекулами поверхностного слоя жидкости. Поэтому при низких давлениях поверхностное натяжение жидкости практически не зависит от давления газа над жидкостью.

С ростом температуры взаимодействие молекул жидкости несколько ослабляется, так как при увеличении кинетической энергии молекул жидкость «разрыхляется» и среднее расстояние между молекулами возрастает. Поэтому с увеличением температуры ве-

личина α должна уменьшаться. В том же направлении должно действовать и возрастание плотности насыщенного пара с повышением температуры. При приближении T к T_k свойства пара приближаются к свойствам жидкости и условия взаимодействия, в которых находятся молекулы поверхностного слоя, перестают практически отличаться от условий внутри жидкости.

Поэтому при $T = T_k$, *в критической точке, поверхностное натяжение жидкости* α *должно обращаться в нуль.*

На этот факт, как уже упоминалось в предыдущей главе, впервые указал Д. И. Менделеев в 1860 г. Для большинства жидкостей *поверхностное натяжение падает с температурой практически линейно* по закону

$$\alpha_t = \alpha_0 (1 - at). \tag{43.9}$$

Из (43.9) следует, что $\alpha = 0$ при $t = 1/a$. Следовательно, $1/a = t_k$ есть критическая температура данной жидкости, и (43.9) можно преобразовать к виду

$$\alpha_t = \alpha_0 \left(1 - \frac{t}{t_k}\right). \tag{43.10}$$

До сих пор мы исходили, в первом приближении, из предположения, что любая молекула взаимодействует лишь со своими ближайшими 12 соседями. Строго говоря, это, конечно, не так. Молекулы взаимодействуют и на бо́льших расстояниях, но силы взаимодействия быстро убывают. Как показывает детальное рассмотрение этой задачи, энергия взаимодействия между двумя молекулами с ростом r убывает как $1/r^6$. Разделив мысленно жидкость, окружающую молекулу, на концентрические слои одинаковой толщины, как это показано на рис. 3.26, мы видим, что число молекул в каждом последующем слое возрастает как r^2. Следовательно, энергия взаимодействия молекул с каждым концентрическим слоем изменяется с расстоянием слоя от центральной молекулы пропорционально $r^2 \cdot \frac{1}{r^6} = \frac{1}{r^4}$, т. е. все еще очень быстро. Практически с данной молекулой внутри жидкости взаимодействует только относительно небольшое число молекул. Поэтому полную энергию любой молекулы внутри жидкости можно практически считать не зависящей от объема жидкости.

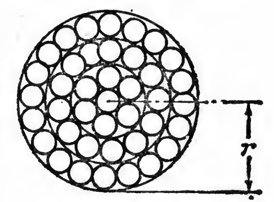


Рис. 3.26.

Однако, если слой жидкости достаточно тонок, то энергия молекул будет зависеть уже от его толщины. Это обстоятельство оказывается особенно существенным при наличии в жидкости растворенных ионов (диссоциировавших ионных молекул типа NaCl и др.), взаимодействие между которыми убывает значительно медленнее, чем по закону $1/r^6$.

Рассмотрим тонкую пленку жидкости (рис. 3.27), толщина которой сравнима с «эффективным радиусом действия» R молекулярных сил (где R — расстояние, на котором молекулярные силы становятся пренебрежимо малы). При толщине пленки $h_1 > 2R$ молекула A будет обладать такой же потенциальной энергией, как и любая молекула внутри жидкости. При толщине же пленки h_2 молекула A будет взаимодействовать с меньшим числом молекул (в области, отмеченной простой штриховкой), т. е. ее энергия будет больше, чем в случае h_1 (следует помнить, что $U < 0$ и уменьшение $|U|$ означает возрастание энергии!). При толщине h_3 потенциальная энергия молекул будет еще больше, значительно превышая потенциальную энергию молекулы на поверхности толстого слоя жидкости.

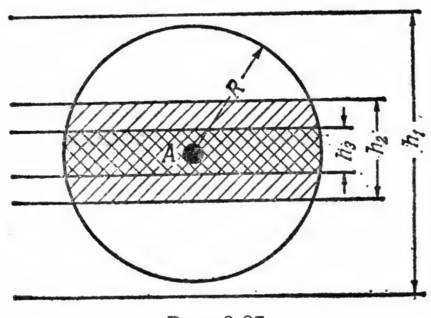


Рис. 3.27.

Уменьшение энергии этих молекул, а значит, и всей жидкости в целом возможно, следовательно, за счет увеличения толщины пленки. Стремление к увеличению толщины пленки выражается в появлении добавочного давления в пленке. Это избыточное давление было обнаружено и изучено Б. В. Дерягиным и названо *расклинивающим давлением*. Оно становится особенно заметным при наличии в жидкости ионов, взаимодействие между которыми убывает значительно медленнее, чем по закону $1/r^6$, справедливому для нейтральных молекул. Наличие расклинивающего давления во многих случаях объясняет важный факт устойчивости коллоидных и дисперсных систем. На рис. 3.28 показана схема, объясняющая, как расклинивающее давление препятствует слипанию пузырьков газа внутри жидкости при сближении их на очень малые расстояния.

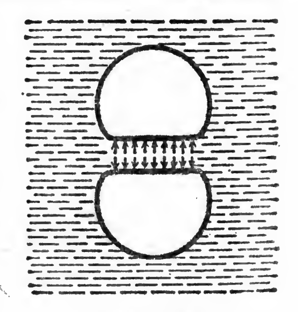


Рис. 3.28.

По-видимому, это расклинивающее давление играет существенную роль в открытом П. А. Ребиндером эффекте облегчения деформирования и механического разрушения твердых тел при воздействии растворов — *понизителей твердости*. Проникая, например, в микроскопические трещины в породе и оказывая расклинивающее давление на их стенки,

подобные жидкости облегчают разрушение горных пород при бурении.

Кроме температуры и толщины слоя, на величину поверхностного натяжения жидкости существенно влияют растворенные в последней, даже в малых количествах, примеси. Если энергия взаимодействия молекулы растворенного вещества с молекулой растворителя $|U^*_{\text{мин}}|$ меньше энергии взаимодействия молекул растворителя $|U_{\text{мин}}|$ между собой, то при выходе растворенной молекулы на поверхность и вытеснении ею одной молекулы растворителя из поверхности в объем жидкости будет, в соответствии с (43.1), выделяться энергия

$$\Delta W^* \approx 6|U_{\text{мин}}| - 6|U^*_{\text{мин}}| > 0. \qquad (43.11)$$

Так как $\Delta W^* > 0$, то растворенные молекулы будут вытесняться на поверхность жидкости и одновременно будут понижать поверхностное натяжение раствора.

Такие вещества носят название *поверхностно-активных веществ* по отношению к данной жидкости. Простейшими поверхностно-активными веществами по отношению к воде являются спирты, жирные кислоты и их соли (мыла). В расплавленных металлах подобными поверхностно-активными веществами, концентрирующимися на поверхности расплава, являются обычно более легкоплавкие примеси.

Если жидкость находится в сосуде, то, кроме свободной поверхности, существует еще граница раздела между жидкостью и твердым телом — стенками сосуда. Молекулы жидкости, соприкасающиеся со стенкой сосуда, взаимодействуют со своими ближайшими соседями — молекулами как жидкости, так и твердого тела. Энергия такого взаимодействия приближенно равна

$$W^{\text{т}} \approx 6|U^{\text{ж}}_{\text{мин}}| + 6|U^{\text{т}}_{\text{мин}}|, \qquad (43.12)$$

где $|U^{\text{т}}_{\text{мин}}|$ — энергия взаимодействия молекулы жидкости с молекулой твердого тела.

При переходе такой молекулы из пограничного слоя в объем жидкости будет выделяться энергия

$$\Delta W = W^{\text{т}} - 12|U^{\text{ж}}_{\text{мин}}| = 6\{|U^{\text{т}}_{\text{мин}}| - |U^{\text{ж}}_{\text{мин}}|\}. \qquad (43.13)$$

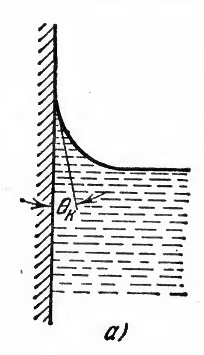
Если молекула жидкости сильнее взаимодействует с молекулами твердого тела, чем с молекулами той же жидкости, то

$$|U^{\text{т}}_{\text{мин}}| > |U^{\text{ж}}_{\text{мин}}| \quad \text{и} \quad \Delta W > 0.$$

В этом случае жидкость будет стремиться увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом и растечься по последнему. Принято говорить, что в этом случае жидкость *смачивает* твердое тело. Так, вода смачивает стекло. На границе с вертикальной стен-

кой сосуда молекулы жидкости будут всползать на стенку, как показано на рис. 3.29, *а*. При этом, однако, будет затрачиваться энергия на увеличение площади поверхности раздела жидкость — газ (влиянием объемных сил тяжести можно пренебречь). Равновесие между этими тенденциями установится, когда поверхность жидкости составит со стенкой некоторый угол θ_k, называемый **краевым углом** и зависящий от соотношения между $U^T_{\text{мин}}$ и $U^{\text{ж}}_{\text{мин}}$. Для жидкости, смачивающей данную поверхность, краевой угол $\theta_к$ острый ($\theta_к < \pi/2$) и тем меньший, чем лучше смачивание. Следовательно, если поместить маленькую каплю воды на поверхность стеклянной пластинки, то вода будет растекаться по стеклу, как это показано на рис. 3.29, *б*.

Для очень хорошо смачивающих жидкостей, как, например, для комбинации вода — стекло, можно практически считать $\theta_к \approx 0$.



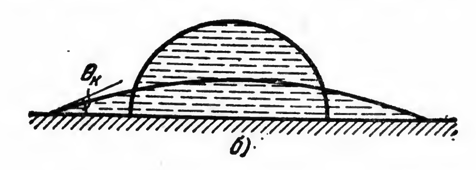


Рис. 3.29.

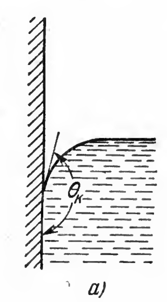
Как это показано на рис. 3.30, *а*, если $| U^{\text{т}}_{\text{мин}} | < | U^{\text{ж}}_{\text{мин}} |$, то $\Delta W < 0$ и жидкость будет стремиться сократить поверхность соприкосновения с твердым телом. Примером такой **несмачивающей** жидкости является по отношению к стеклу ртуть. Капля ртути, помещенная на стеклянную пластинку, стягивается и принимает вид, изображенный на рис. 3.30, *б*. Краевой угол для таких несмачивающих жидкостей — тупой ($\pi/2 < \theta_к < \pi$).

На приведенных примерах мы выяснили, что одно и то же твердое тело (стекло) может смачиваться одной жидкостью (водой) и не смачиваться другой (ртутью). С другой стороны, одна и та же жидкость (например ртуть) может не смачивать одну твердую поверхность (стекло) и смачивать другую (цинк).

Поверхностно-активные вещества, растворенные в жидкости, могут концентрироваться на границе раздела и покрывать тончайшей, мономолекулярной пленкой (пленкой, состоящей из одного слоя молекул) поверхность твердого тела. В таких случаях принято говорить, что вещество **адсорбируется** на поверхности твердого тела. В зависимости от свойств адсорбировавшихся на поверхности твердого тела молекул его смачиваемость может резко измениться (как в сторону увеличения, так и уменьшения).

На этом явлении основан широко применяющийся в технике метод обогащения руд («флотация»).

Руда, содержащая различные минералы, мелко раздробляется и высыпается в чаны с водой, содержащей специально подобранные поверхностно-активные вещества. Часть минералов адсорбирует их. Через чаны продувается воздух. Крупинки минералов, у которых адсорбированные вещества понизили смачиваемость, «прилипают» к воздушным пузырькам и выносятся на поверхность жидкости, а остальные опускаются на дно. В результате достигается предварительное разделение компонентов руды — ее обогащение.



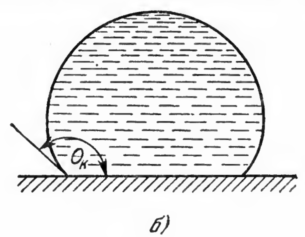


Рис. 3.30.

§ 44. Капиллярные явления

Форма, которую принимает свободная поверхность жидкости, зависит от сил поверхностного натяжения, от взаимодействия с ограничивающими поверхность твердыми стенками, а также от силы земного тяготения, действующей на жидкость. Особыми оказываются условия равновесия на линии раздела жидкость — газ — твердая стенка (рис. 3.29 и 3.30) в тонких пленках и в узких сосудах — капиллярах.

Наблюдающиеся в этих случаях явления получили общее название **капиллярных**. Детальная теория капиллярных явлений была разработана в XIX веке главным образом в работах английского физика Т. Юнга, французского физика П. Лапласа, немецкого математика К. Гаусса и русских ученых А. Ю. Давидова и И. С. Громеки.

Капиллярные эффекты, широко известные в технике и быту, в основном обусловлены тем, что благодаря действию сил поверхностного натяжения давление внутри жидкости может отличаться на некоторую величину Δp от внешнего давления p газа или пара над поверхностью жидкости. Поясним это на простейшем примере.

Пусть свободная поверхность жидкости представляет собой сферу радиуса R (капля) или ограниченный участок такой сферической поверхности (уровень жидкости в тонком цилиндрическом

капилляре). Отсечем мысленно произвольной плоскостью от этой сферы шаровой сегмент, как показано на рис. 3.31. Внешняя поверхность этого сегмента ограничена от остальной поверхности жидкости окружностью радиуса $r = R \sin\beta$. На каждый бесконечно малый элемент длины этого контура Δl действует сила поверхностного натяжения

$$\Delta F = \alpha\,\Delta l \tag{44.1}$$

в направлении, касательном к поверхности сферы, т. е. под тем же самым углом β к плоскости сечения.

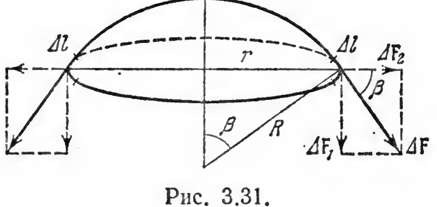


Рис. 3.31.

Разложим эту силу на две составляющие

$$\Delta F_1 = \Delta F \sin\beta$$

и

$$\Delta F_2 = \Delta F \cos\beta, \tag{44.2}$$

расположенные соответственно перпендикулярно и в плоскости сечения. Геометрическая сумма сил ΔF_2 равна нулю, так как эти силы на противоположных сторонах контура направлены в обратные стороны и взаимно уравновешиваются. Поэтому равнодействующая всех сил поверхностного натяжения, действующих на вырезанный сегмент F, будет направлена перпендикулярно к плоскости сечения внутрь жидкости и равна алгебраической сумме составляющих ΔF_1:

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin\beta = \sum \alpha\,\Delta l\,\frac{r}{R} = \frac{\alpha r}{R}\sum \Delta l = \frac{\alpha\cdot 2\pi r^2}{R}, \tag{44.3}$$

так как полная длина контура $\sum \Delta l$ равна $2\pi r$.

Эта сила F будет прижимать сегмент к остальной части жидкости по всей разделяющей их поверхности $S = \pi r^2$. Дополнительное давление, создаваемое силами поверхностного натяжения внутри жидкости, тогда равно

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{\alpha\cdot 2\pi r^2}{R\pi r^2} = \frac{2\alpha}{R}. \tag{44.4}$$

Как и следовало ожидать, это дополнительное давление не зависит от r, т. е. от того, в каком месте поверхности жидкости мы произвели мысленное сечение.

Плоскую поверхность жидкости можно рассматривать как предельный случай сферы бесконечно большого радиуса $R = \infty$. В этом случае согласно (44.4) $\Delta p = \frac{2\alpha}{\infty} = 0$. Для *плоской поверхности* силы поверхностного натяжения направлены вдоль поверхности и не создают дополнительного давления: *давление внутри жидкости равно внешнему давлению.*

В случае *вогнутой поверхности* жидкости, например, если внутри жидкости находится пузырек газа радиуса R (рис. 3.32), повторяя весь предыдущий вывод, мы убедимся, что результирующая сила F направлена из жидкости в газ. В этом случае

$$\Delta p = -\frac{2\alpha}{R}, \tag{44.5}$$

т. е. давление внутри жидкости под вогнутой поверхностью меньше, чем в газе (внутри пузырька) на величину Δp.

Чтобы не выписывать двух различных формул (44.4) и (44.5) для выпуклой и вогнутой поверхностей, принято радиусу кривизны поверхности R приписывать знак в зависимости от его направления.

Если радиус кривизны R направлен внутрь жидкости (выпуклая поверхность), то полагают $R > 0$; если же радиус кривизны направлен наружу (поверхность вогнутая), то полагают $R < 0$. Тогда с учетом знака можно написать единую формулу для дополнительного давления под сферической поверхностью жидкости

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}. \tag{44.6}$$

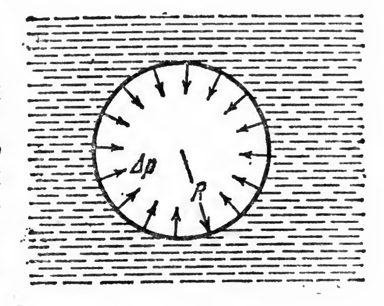


Рис. 3.32.

Уравнение (44.6) носит название формулы Лапласа.

В общем случае произвольной поверхности двоякой кривизны, пример которой изображен на рис. 3.33, кривизна в двух взаимно-перпендикулярных сечениях поверхности может быть разной и радиусы кривизны этих сечений R_1 и R_2 в данной точке M могут отличаться друг от друга по величине и по знаку. Для такой поверхности формула Лапласа может быть обобщена:

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{44.7}$$

В зависимости от значений и знаков R_1 и R_2 величина Δp может оказаться положительной или отрицательной.

В частном случае сферы $R_1 = R_2 = R$ и формула (44.7) переходит в (44.6).

Если слой жидкости расположить между двумя близкими параллельными пластинками, то поверхность жидкости примет форму кругового цилиндра некоторого радиуса R. В этом частном случае $R_1 = R$, а $R_2 = \infty$, так как в перпендикулярном сечении кривизна равна нулю. Из обобщенной формулы Лапласа тогда следует, что дополнительное давление в жидкости под

цилиндрической поверхностью равно

$$\Delta p_{ц} = \alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{\alpha}{R}, \tag{44.8}$$

т. е. вдвое меньше, чем под сферической поверхностью того же радиуса.

В узких трубках (капиллярах) вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости (т. е. мениск) становится значительной. Возникающее при этом дополнительное давление Δp вызывает заметное поднятие или опускание уровня жидкости.

Рассмотрим для примера случай круглого капилляра радиуса r, погруженного в большой сосуд с жидкостью, не смачивающей стенки капилляра. При этом внутри капилляра образуется мениск, и под действием дополнительного давления Δp жидкость в капилляре опускается на некоторую глубину, как это показано на рис. 3.34. В широком сосуде благодаря действию силы тяжести можно считать поверхность жидкости практически плоской. В узкой трубке, напротив, можно пренебречь действием сил тяжести по сравнению с силами поверхностного натяжения и поверхность жидкости считать сферой некоторого радиуса R. Из рис. 3.34 видно, что

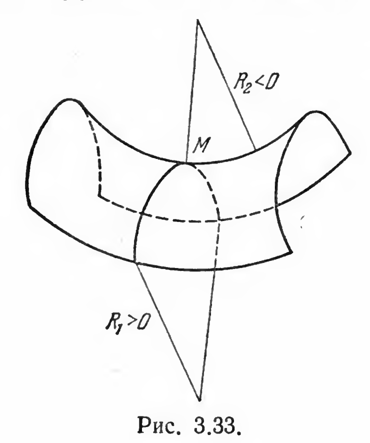


Рис. 3.33.

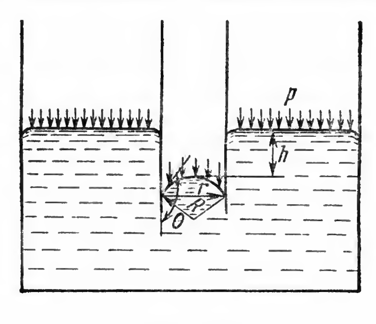


Рис. 3.34.

$$R = \frac{r}{|\cos\theta|}, \tag{44.9}$$

где θ — краевой угол на границе жидкость — твердая стенка.

На уровне поверхности жидкости в капилляре давление в жидкости равно $p + \Delta p = p + \frac{2\alpha}{R}$, где p — внешнее давление в газе. По закону сообщающихся сосудов оно должно быть равно полному давлению на том же уровне в широком сосуде $p + \rho g h$, где $\rho g h$ —

гидростатическое давление столба жидкости плотности ρ на глубине h (g — ускорение силы тяжести). Приравнивая, получим:

$$p+\frac{2\alpha}{R}=p+\rho gh, \tag{44.10}$$

откуда

$$h=\frac{2\alpha}{\rho gR}=\frac{2\alpha\,|\cos\theta\,|}{\rho gr}. \tag{44.11}$$

Если учесть знаки и опускание уровня рассматривать как отрицательный подъем ($h<0$), то последнее выражение можно записать в виде

$$h=\frac{2\alpha\cos\theta}{\rho gr}. \tag{44.12}$$

В точности такое же выражение мы получим и для высоты поднятия ($h>0$) жидкости, смачивающей стенки капилляра радиуса

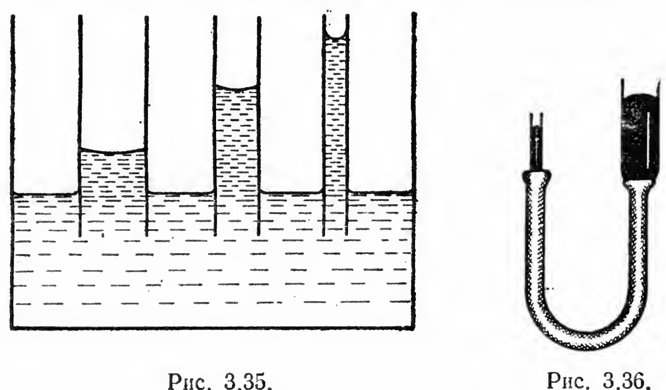


Рис. 3.35. Рис. 3.36.

r ($\cos\theta>0$). При полном смачивании (например, вода — стекло) $\theta=0$, $\cos\theta=1$, радиус мениска R равен радиусу капилляра r и высота поднятия жидкости равна

$$h=\frac{2\alpha}{\rho gr}. \tag{44.13}$$

Из (44.13) следует, что высота поднятия или опускания уровня жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу (рис. 3.35). Для воды при обычных условиях ($\rho=1000$ кг/м^3, $\alpha=0{,}071$ Н/м) в капилляре диаметром $d=2r=1$мкм $=10^{-6}$ м уровень поднимается на высоту

$$h=\frac{2\cdot 0{,}071}{10^3\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}}\approx 30 \text{ м}.$$

Капиллярные явления играют большую роль в природе, технике, сельском хозяйстве, в быту и при научных исследованиях. По тонким капиллярным каналам в фитиле керосин поднимается из резервуара к горелке. Если между фундаментом и стенами строящегося здания не проложить слой гидроизоляции, то влага из почвы будет подниматься по капиллярным порам кирпича и вызовет отсыревание всего здания. Если диаметр обоих колен ртутного манометра неодинаков и притом один из них — капилляр, то ртуть в них будет находиться на неодинаковом уровне (рис. 3.36), что приведет к ошибкам в измерении давления.

§ 45. Явления переноса. Вязкость жидкости

При хаотическом тепловом движении, как указывалось в § 42, молекулы жидкости перескакивают из одних временных положений равновесия в соседние.

В отличие от газа «длина свободного пробега» при подобных перескоках имеет порядок диаметра молекул и практически не зависит от внешнего давления и температуры. Примерный путь, совершаемый молекулой в жидкости, изображен на рис. 3.37, где стрелками показаны колебания молекулы около временных положений равновесия, а линиями — перескоки их с места на место.

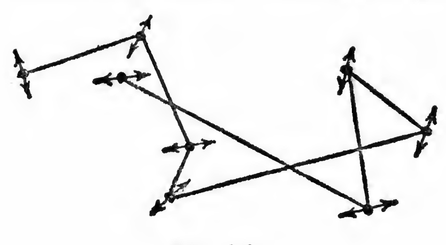


Рис. 3.37.

Переходя с места на место, молекулы диффундируют внутри жидкости. Это явление **самодиффузии** можно наблюдать, если примешать к жидкости некоторое число молекул радиоактивного изотопа, за движением которых можно следить по их излучению.

Поток j молекул, диффундирующих через единицу площади за единицу времени, так же как и при диффузии в газе, определяется уравнением

$$j = -D\frac{dn}{dx}, \tag{45.1}$$

где n — концентрация диффундирующих молекул, $\frac{dn}{dx}$ — градиент этой концентрации, а D — коэффициент диффузии.

Этим же уравнением (45.1) описывается и диффузия посторонних молекул и ионов, растворенных в жидкости. Чем выше температура, тем меньшее число колебаний совершает молекула в положении равновесия до своего перескока, тем интенсивнее процесс диффузии и тем больше величина D. Однако коэффициенты

диффузии в жидкости все же имеют порядок 10^{-9} м²/с, т. е. во много раз меньше, чем в газах.

Перенос количества движения между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, также описывается формально теми же уравнениями, что и в газе. Сила трения между соседними слоями равна

$$\frac{F}{S} = -\eta \frac{dv}{dx}, \tag{45.2}$$

где S — площадь соприкосновения слоев, $\frac{dv}{dx}$ — градиент скорости движения жидкости (рис. 3.38) и η — коэффициент внутреннего трения, или вязкость жидкости.

В газе перенос количества движения осуществляется при переходе молекул из одного слоя в другой. Благодаря одинаковому механизму диффузии и внутреннего трения, коэффициенты D и η в газе прямо пропорциональны друг другу:

$$D_г \sim \eta_г. \tag{45.3}$$

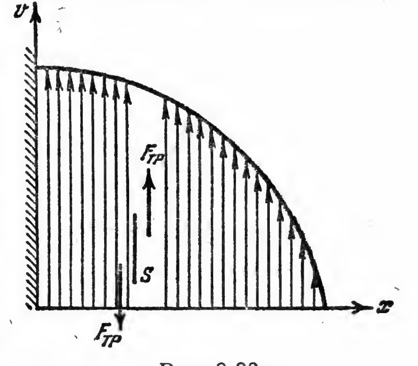


Рис. 3.38.

В жидкости же механизм внутреннего трения отличен от механизма диффузии. Так как молекулы жидкости бо́льшую часть времени находятся около положений равновесия, то движущаяся масса жидкости увлекает соседние слои в основном за счет сил сцепления. С ростом температуры текучесть жидкости возрастает, а вязкость падает. Поэтому, как показал Я. И. Френкель, вязкость жидкости обратно пропорциональна коэффициенту диффузии:

$$\eta_ж \sim \frac{1}{D_ж}. \tag{45.4}$$

При нагревании жидкость «разрыхляется» и возрастает ее свободный объем $V - b$ (где b — постоянная в уравнении ван-дер-Ваальса, характеризующая недоступную для молекул долю полного объема системы V). Учитывая это, А. И. Бачинский предложил очень простую формулу, описывающую зависимость вязкости от температуры:

$$\eta_ж = \frac{B}{V - b}, \tag{45.5}$$

где B — константа, различная для разных жидкостей.

Формула Бачинского хорошо оправдывается на опыте, но не показывает явной зависимости $\eta_ж$ от температуры. Я. И. Френкель вывел формулу, непосредственно связывающую $\eta_ж$ с T:

$$\eta_ж = \text{const} \cdot e^{\frac{w}{kT}}. \qquad (45.6)$$

Здесь w — энергия, которую нужно сообщить молекуле жидкости, чтобы она могла перескочить из одного положения равновесия в соседнее. Величина w обычно имеет порядок $(2 \div 3) \cdot 10^{-20}$ Дж. Поэтому согласно (45.6) при нагревании жидкости, например, на 10 °С вязкость ее падает на 20—30%.

Вязкость жидкости обычно во много раз больше, чем вязкость газа. Так, для воды при 25 °С $\eta_{вода} = 0{,}01$ П (пуаз) $= 0{,}01$ г/(см·с)=

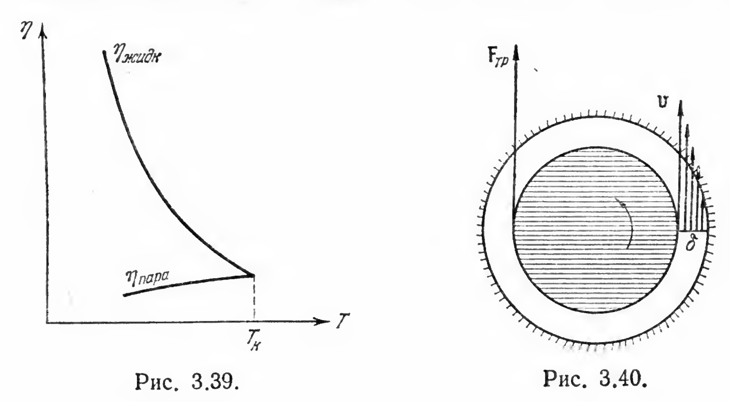


Рис. 3.39.

Рис. 3.40.

$= 10^{-3}$ кг/(м·с), а для насыщенного водяного пара $\eta_{пар} = 10^{-4}$ П. С ростом температуры вязкость жидкости быстро падает, а вязкость пара медленно возрастает, и при критической температуре T_k они сравниваются друг с другом, как это показано на рис. 3.39.

При понижении температуры вязкость большинства жидкостей быстро возрастает. Однако из этого общего правила имеется исключение П. Л. Капица нашел, что при приближении к абсолютному нулю температуры гелий не только не увеличивает своей вязкости, но переходит в «сверхтекучее» состояние, характеризуемое полным остутствием вязкости. Природа этого явления чисто квантовая, и касаться ее здесь мы не будем.

Вязкость жидкости определяет силу сопротивления жидкости движению в ней тел. Так, сила сопротивления движению шара радиуса r при малых скоростях движения находится по тому же уравнению

$$F = 6\pi r \eta v, \qquad (45.7)$$

как и при движении в газе (формула Стокса). Эта сила прямо пропорциональна вязкости среды η и скорости движения шара v. Также прямо пропорциональна η и v и сила сопротивления движению жидкости в капиллярах.

В 1883 г. Н. П. Петров, исходя из уравнения (45.2), рассчитал силу трения, действующую на смазанный шип, вращающийся в подшипнике:

$$F=\eta\frac{v}{\delta}S, \tag{45.8}$$

где v — окружная скорость шипа, S — его поверхность и δ — толщина зазора между шипом и подшипником (рис. 3.40). На этой основе была создана гидродинамическая теория смазки, применяемая для расчета трения и износа трущихся поверхностей машин.

Отметим, что с точностью до безразмерного коэффициента формула (45.7) может быть получена из анализа размерностей входящих в нее величин. Действительно, имеется сила F, размерность которой $[F]$ = кг·м/с^2. Эта сила по характеру задачи должна зависеть от: 1) вязкости среды η с размерностью $[\eta]$ = = кг/(м·с), 2) радиуса шарика $[r]$ = м и 3) его скорости $[v]$ = м/с. Из этих трех величин можно получить величину размерности F только одним способом: если составить их произведение. Следовательно, с точностью до безразмерного множителя a

$$F=ar\eta v. \tag{45.9}$$

Для определения значения $a=6\pi$ учет размерностей уже недостаточен.

Аналогичный «поиск» предварительного результата до точных расчетов с помощью анализа размерностей может быть применен в самых различных задачах.

ГЛАВА XII

СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 46. Кристаллические и аморфные тела

В отличие от жидкостей *твердые тела обладают упругостью формы.* Прикладывая к твердому телу внешние силы, можно изменить его форму тем сильнее, чем больше приложенные усилия. При этом, если не перейден некоторый уровень деформации, то при снятии нагрузки твердое тело принимает свою первоначальную форму. На рис. 3.41 изображена типичная для твердых тел упругая деформация сдвига. Подобная деформация в жидкости является неупругой. Если заставить жидкость течь, то, как мы указывали в предыдущей главе, между движущимися с различной скоростью слоями жидкости появляются силы трения, препятствующие этому движению. Однако при прекращении действия сил, вызвавших движение, сдвинувшиеся друг относительно друга слои жидкости в отличие от твердых тел не возвращаются в исходное положение.

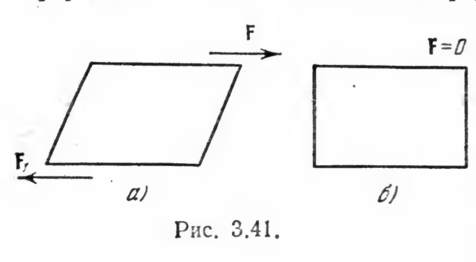


Рис. 3.41.

Эти качественные различия жидкого и твердого состояний вещества обусловлены различием в их молекулярном строении и в характере теплового движения молекул. При нагревании твердое тело при определенных условиях переходит в жидкое состояние — плавится. Жидкость при понижении температуры затвердевает.

Поместим кусок твердого тела в пробирку и будем нагревать ее на горелке. Термопара, опущенная в пробирку и касающаяся поверхности твердого тела, будет отмечать его температуру (рис. 3.42).

С течением времени t температура T твердого тела непрерывно растет, как это показано на рис. 3.43. По достижении некоторой, характерной для данного вещества температуры $T_{пл}$ тело начинает

плавиться, и при дальнейшем нагревании температура его остается постоянной. Все подводимое тепло при этом затрачивается на плавление твердого тела. Величина скрытой теплоты плавления $q_{пл}$ обычно в несколько раз меньше скрытой теплоты испарения. Так, для воды $q_{исп} = 2{,}25 \cdot 10^6$ Дж/кг при 100 °С, а для льда $q_{пл} = 3{,}31 \cdot 10^5$ Дж/кг при 0 °С.

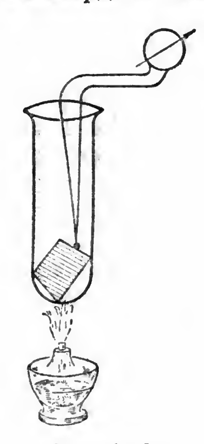


Рис. 3.42.

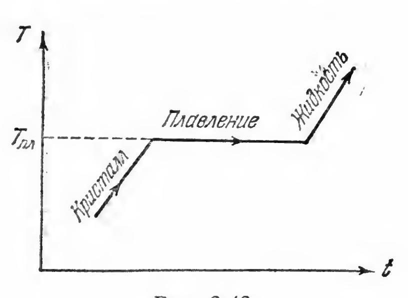


Рис. 3.43.

Температура смеси твердого тела с его расплавом остается постоянной и равной температуре плавления до тех пор, пока все твердое тело не превратится в жидкость. При дальнейшем нагревании температура жидкости начнет опять расти, как показано на рис. 3.43.

Если прекратить нагревание, жидкость начнет охлаждаться, и температура ее со временем будет падать, как это показано на рис. 3.44. По достижении температуры плавления жидкость должна начать кристаллизоваться. Практически, однако, при отсутствии **затравки** в чистой жидкости образование первоначальных микрокристалликов, являющихся **центрами кристаллизации**, затруднено и вещество, оставаясь в жидком состоянии, остынет до температуры $T < T_{пл}$.

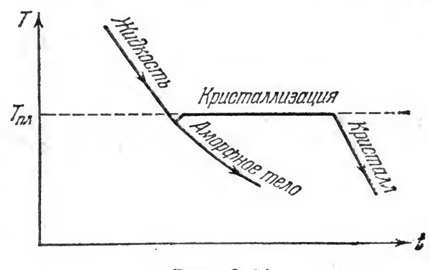


Рис. 3.44.

При достаточном переохлаждении через некоторое время в жидкости появятся центры кристаллизации, которые начнут расти. При этом выделяется скрытая теплота плавления или кристаллизации $q_{пл}$, и температура расплава поднимается вновь до $T_{пл}$. После этого на кривой охлаждения появляется такая же горизонтальная линия, как и при плавлении. Когда вся жидкость закри-

сталлизуется, скрытая теплота кристаллизации перестанет выделяться, и образовавшиеся кристаллики будут в дальнейшем остывать.

При кристаллизации металлов переохлаждение расплава не превышает нескольких долей градуса. В других случаях возможны переохлаждения расплава на градусы и десятки градусов.

Ряд веществ, как, например, стекло, могут быть переохлаждены на сотни градусов. Вязкость этих сильно переохлажденных жидкостей с падением температуры возрастает столь сильно, что перемещения атомов в них и образование центров кристаллизации становятся почти невозможными.

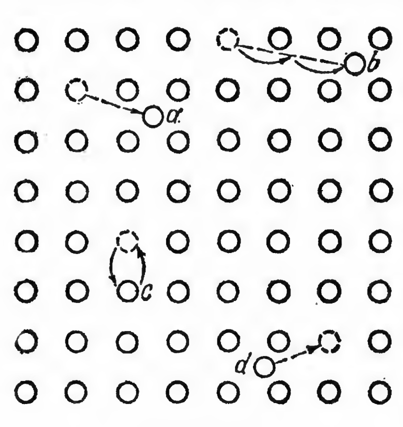


Рис. 3.45.

Такие сильно переохлажденные жидкости практически теряют текучесть и постепенно приобретают твердость и другие свойства твердого тела. Подобные тела носят название **аморфных твердых тел**.

Возможны случаи, когда одно и то же вещество, в зависимости от условий охлаждения, может быть получено как в кристаллическом, так и аморфном твердом состоянии. Например, стекло при очень медленном охлаждении расплава может кристаллизоваться (как говорят, «зарухать»). При этом на границах мелких образовавшихся кристалликов будет происходить многократное отражение и рассеяние света, и закристаллизовавшееся стекло потеряет свое самое важное свойство — прозрачность.

И в кристаллическом и в аморфном состоянии твердого тела атомы находятся в определенных положениях равновесия. Под действием внешних сил атомы несколько смещаются из этих положений и по снятии нагрузки возвращаются в них обратно, если эти смещения не превышают определенной, характерной для данного тела величины. Этим и обусловлена упругость формы твердых тел.

При нагревании твердого тела от абсолютного нуля его атомы начинают совершать малые колебания около своих положений равновесия; энергия и амплитуда этих колебаний возрастают с температурой. Благодаря хаотичности теплового движения отдельные атомы, обладающие случайным избытком тепловой энергии, срываются со своих мест и проталкиваются между соседями (рис. 3.45). Сорванный со своего места атом попадает во временное, менее устойчивое положение равновесия (атом *a*) и после ряда ко-

лебаний перескакивает далее, в соседнее положение временного равновесия (атом *b*). В оставшуюся на месте сорванного атома «дырку» (вакансию), т. е. незаполненное положение устойчивого равновесия, может перескочить соседний атом, и тем самым формально дырка тоже будет «перемещаться» в твердом теле (атом *c*). При встрече сорванного со своего места атома и дырки возможна их взаимная рекомбинация (атом *d*).

Такое перемещение отдельных сорванных атомов и дырок обусловливает возможность самодиффузии и диффузии в твердых телах. Поскольку число таких атомов и дырок составляет лишь небольшую долю от всех атомов твердого тела, то коэффициенты

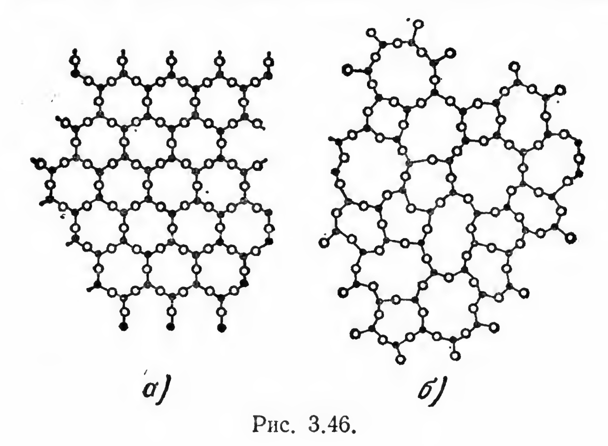


Рис. 3.46.

диффузии в твердых телах во много раз меньше, чем в жидкостях, и обычно имеют порядок 10^{-14} м^2/с $\approx 10^{-9}$ м^2/сут.

С ростом температуры концентрация подобных дефектов в строении твердого тела сильно возрастает, что приводит к соответствующему росту коэффициентов диффузии.

В аморфных твердых телах ближайшие соседние атомы располагаются в определенном порядке на определенных расстояниях, зависящих от строения атомов и характера возникающих между ними связей. Если рассматривать некоторый из атомов как центральный, то атомы ближайшего к нему слоя расположатся в определенном порядке по отношению к этому центральному. Атомы второго слоя будут располагаться в определенном порядке и на определенных расстояниях от атомов первого слоя, но их порядок относительно центрального атома уже несколько нарушается. Это нарушение быстро возрастает с удалением от «центра», и взаимное расположение атомов, удаленных друг от друга на 3—5 диаметров, может быть весьма различным, подчиняясь закону случая, как это схематически изображено на рис. 3.46, *б*.

Таким образом, в аморфных телах существует лишь ближний порядок во взаимном расположении соседних атомов. В этом отношении аморфные тела по своей структуре похожи на жидкости и отличаются от последних лишь малой подвижностью своих атомов. С ростом температуры эта подвижность возрастает и аморфное тело постепенно и *непрерывно* переходит в жидкое состояние. Так же как и жидкость, аморфное тело изотропно, т. е. свойства его во всех направлениях одинаковы.

В твердом кристалле атомы располагаются в определенном порядке во всем теле (рис. 3.46, *а*). Атом, находящийся в n-м слое от данного центрального атома, всегда находится от него на расстоянии, точно в два раза меньшем, чем атом $2n$-го слоя.

В отличие от аморфных тел и жидкостей в кристаллах существует, как это схематически показано на рис. 3.47, дальний порядок в расположении атомов всего твердого тела. Атомы

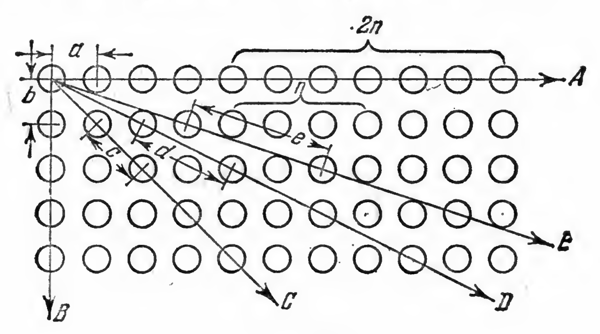


Рис. 3.47.

в этом случае располагаются в узлах правильной пространственной сетки, так называемой кристаллической решетки. Для любого направления в пространстве A, B, C, D, E,..., проходящего через центры атомов, расстояния между центрами двух соседних атомов (a, b, c, d, e,..., соответственно) остаются неизменными вдоль всей прямой (но отличаются для разных прямых!).

Как указывалось выше, с увеличением температуры возрастает число атомов, сорванных со своих нормальных положений равновесия, и число «дырок». Однако наличие подобных дефектов в отдельных местах кристаллической решетки не нарушает дальнего порядка вплоть до температуры плавления. При плавлении дальний порядок *скачкообразно* разрушается и в жидкости остается лишь ближний порядок расположения атомов.

Как видно из рис. 3.47, расстояние между соседними атомами в кристалле зависит от направления. В соответствии с этим и многообразные физические свойства — упругие, механические, тепловые, электрические, магнитные, оптические и другие свойства

кристаллов будут различными по различным направлениям. В отличие от аморфных тел кристаллы анизотропны. Всем известны листочки слюды, которые легко скалываются и расщепляются в одном направлении и с трудом режутся в перпендикулярном к нему.

Анизотропия кристаллов резко проявляется и в процессе их роста. При образовании кристаллика из расплава или раствора скорости роста различных его граней отличаются в определенное число раз друг от друга. Это, в частности, обусловливает правильную форму возникающих кристалликов. На рис. 3.48 показано, как растут грани кристалла, имеющие различные скорости роста v_1 и v_2.

На рис. 3.49 изображены одиночные кристаллы (так называемые монокристаллы) некоторых веществ. Монокристаллы различных веществ имеют разное число граней и разные углы между гранями и заметно различаются по внешнему виду. В зависимости от условий роста некоторые грани кристалликов могут «зарастать», так что внешний вид кристаллов одного и того же вещества может оказаться различным, и только тщательное измерение углов между соответствующими гранями сможет выявить принадлежность этих кристаллов к одному и тому же веществу и тождественность строения их кристаллической решетки.

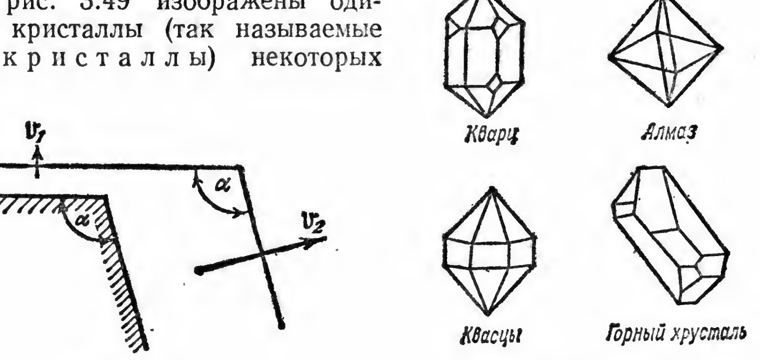


Рис. 3.48.

Рис. 3.49.

Выращивание крупных правильных монокристаллов представляет собой трудную задачу. Ряд методов и приемов выращивания кристаллов различных веществ (широко используемых в технике) был разработан Бриджменом, Толмэном и А. В. Шубниковым.

При кристаллизации металлов обычно в расплаве возникает сразу много зародышей кристаллизации, расположенных хаотически и растущих до соприкосновения. Поэтому затвердевший металл представляет собой совокупность большого числа

сцепленных друг с другом мелких кристалликов или зерен, ориентированных различным образом (так называемое поликристаллическое тело).

Различная ориентация зерен приводит к тому, что свойства поликристаллического тела по всем направлениям в среднем одинаковы.

§ 47. Типы кристаллических решеток

Правильное расположение атомов в кристалле обусловливает их правильное огранение и другие свойства. Порядок расположения атомов в пространстве может быть различным, но не любым. Из рис. 3.50, *а, б* и *в* видно, что, например, прямоугольники, ромбы или правильные шестиугольники могут полностью покрыть плоскость без пустот, сохраняя дальний порядок взаимного расположения. В противоположность этому совокупность правильных пятиугольников (рис. 3.50, *г*) не может повсюду плотно заполнить плоскость и сохранить дальний порядок, характерный для кристаллического тела.

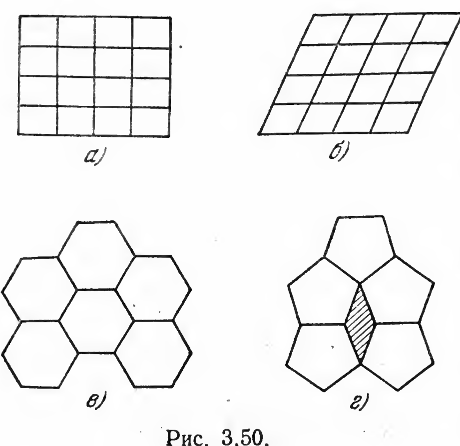


Рис. 3.50.

Для кристаллических решеток характерно наличие симметрии по отношению к определенным направлениям и плоскостям. В соответствии с вышесказанным число различных возможных элементов и типов симметрии также ограничено.

Как показал А. В. Гадолин, существует 32 различных класса симметрии кристаллов. Знаменитый русский кристаллограф Е. С. Федоров установил, что эти классы в свою очередь подразделяются на 230 видов, и указал свойства каждого из последних. Последующее изучение сотен тысяч кристаллических тел, как природных, так и искусственных, позволило найти представителей каждого из этих 230 видов и подтвердило вывод Федорова. Видов, отличных от одного из 230 федоровских, обнаружено не было.

Структурными элементами кристаллической решетки могут являться отдельные атомы, группы атомов, молекул или ионов. По типу сил взаимодействия между элементами можно разделить решетки на четыре основные группы.

1. Ионные решетки. В узлах кристаллической решетки солей обычно располагаются попеременно положительные и отрицательные ионы. Эти ионы притягиваются друг к другу, и решетка удерживается обычными электростатическими (кулоновскими) силами.

Простейшим примером ионной решетки является изображенная на рис. 3.51 решетка каменной соли (NaCl). Для большей наглядности ионы на этом рисунке несколько отодвинуты друг от друга. На самом деле ионы Na^+ и Cl^- почти вплотную соприкасаются своими электронными оболочками.

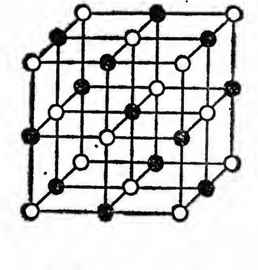




Рис. 3.51.

Как видно из рис. 3.51, каждый ион Na^+ одинаково связан со всеми ближайшими ионами Cl^-, и наоборот. Следовательно, *в кристалле нет отдельных молекул* NaCl. Скорее, *весь кристалл следует рассматривать как одну гигантскую молекулу* Na_nCl_n.

2. Атомные решетки. Типичными представителями решеток, в узлах которых расположены отдельные нейтральные атомы, являются изображенные на рис. 3.52 решетки графита и алмаза. Атомы углерода в этих решетках связаны друг с другом химическими валентными связями, как в молекулах углеводородов. В молекулах бензола и других

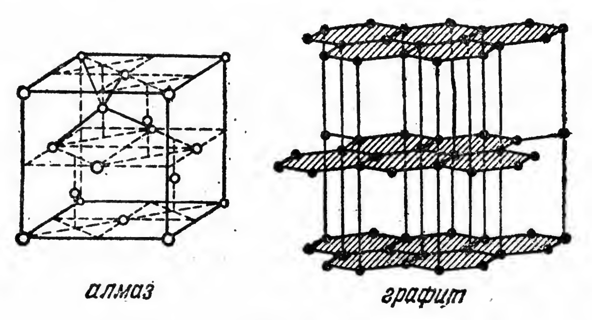


Рис. 3.52.

так называемых циклических углеводородов атомы углерода С под действием валентных сил располагаются в правильные шестиугольники.

Так же располагаются атомы углерода в решетке графита, которая принадлежит к гексагональной (шестиугольной) кристаллографической системе. Решетка графита состоит из ряда параллельных плоскостей. Каждая из плоскостей заполнена тесно связанными атомами углерода, расположенными в углах правиль-

ного шестиугольника и находящимися друг от друга на расстоянии в $1,42 \cdot 10^{-10}$ м. Атомы же соседних плоскостей слабо связаны друг с другом, расстояние между соседними плоскостями более чем в два раза превышает расстояния между атомами шестиугольника и равно $3,40 \cdot 10^{-10}$ м. Поэтому кристалл графита легко скалывается вдоль этих *плоскостей спайности*. В противоположность этому, в кристалле алмаза соседние атомы углерода расположены таким образом, что они находятся на одном и том же расстоянии друг от друга, равном $1,54 \cdot 10^{-10}$ м. Они одинаково и весьма тесно связаны во всех направлениях, что является причиной исключительной прочности и твердости алмаза. Четырехвалентные атомы C связаны каждый со своими ближайшими четырьмя соседями и располагаются по вершинам правильной четырехгранной пирамиды — *тетраэдра* (один из видов кубической кристаллографической системы).

3. *Молекулярные решетки*. Молекулы двухатомных газов (O_2, H_2, Cl_2 и др.), как указывалось в гл. X, могут слабо взаимодействовать друг с другом. Силы взаимодействия между молекулами обусловлены небольшим взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти так называемые *поляризационные* силы являются причиной отклонений от уравнения состояния Менделеева — Клапейрона в реальных газах и поэтому часто называются *ван-дер-ваальсовыми силами*.

Кристаллы таких веществ состоят из отдельных молекул, расположенных в узлах пространственной решетки, правильно ориентированных и связанных между собой ван-дер-ваальсовыми силами. Различие в сцеплении атомов внутри молекул и между молекулами резко сказывается и на их взаимных расстояниях. Так, в твердом хлоре расстояние между атомами внутри молекулы Cl_2 составляет $1,99 \cdot 10^{-10}$ м, а расстояние между соседними молекулами — $2,79 \cdot 10^{-10}$ м.

Инертные газы (Ne, Ar, Kr, Xe) практически не образуют химических соединений. Молекулы этих газов одноатомны, и кристаллы этих элементов тоже следует отнести к типу молекулярных решеток.

Большинство органических соединений с вытянутыми молекулами и молекулами сложной формы (парафины, спирты, целлюлоза, резина и др.) также образует молекулярные решетки.

Малая энергия связи в молекулярных кристаллах является причиной их слабого сцепления, легкой деформируемости и низких температур плавления.

4. *Металлические решетки*. В молекулярных кристаллах электронные конфигурации и орбиты электронов внутри молекул лишь незначительно деформируются при взаимодействии с соседними молекулами. В ионных кристаллах один или несколько

электронов отрываются от так называемого электроположительного атома (например, Na) и прочно связываются с электроотрицательным атомом (например, Cl).

В атомных решетках валентные связи осуществляются пáрами электронов, движущихся по определенным орбитам, охватывающим оба связанных атома.

Иная картина наблюдается в металлах. В них самые внешние, валентные электроны сравнительно слабо связаны с атомами и легко отрываются при образовании кристаллической решетки. В узлах решетки остаются положительно заряженные ионы металла. Освободившиеся электроны перестают принадлежать определенным атомам и движутся по сложным орбитам, охватывающим весь металл. Таким образом, весь металл заполнен своеобразным «электронным газом», стягивающим положительные ионы в плотную кристаллическую решетку. Наличие свободных электронов является причиной хорошей электропроводности металлов.

Приведенный пример алмаза и графита показывает, что одно и то же вещество может кристаллизоваться в различных системах и обладать при этом различными физическими свойствами. Алмаз и графит являются различными аллотропическими модификациями одного и того же вещества — углерода. Явление аллотропии широко распространено в природе. Можно привести еще пример. Обычное белое олово — серебристо-белый ковкий металл с плотностью $7{,}3\cdot10^3$ кг/м^3 — кристаллизуется в так называемой тетрагональной системе. Ниже 18 °С белое олово оказывается неустойчивым и может превращаться в серое олово, которое имеет кубическую решетку и плотность $5{,}85\cdot10^3$ кг/м^3. Появление серых пятен на оловянных предметах при длительном хранении на морозе носит название «оловянной чумы». При температуре 161 °С олово переходит в третью (ромбическую) модификацию и становится очень хрупким.

Различные кристаллические модификации данного вещества имеют различную энергию решетки. Поэтому при превращении одной модификации в другую поглощается или выделяется скрытая теплота превращения, так же как и в процессах плавления или кристаллизации. Каждая модификация является устойчивой в определенной области давлений и температур, вне которых она способна превращаться в другую твердую модификацию или в жидкость. Для примера на рис. 3.53 приведена фазовая диаграмма воды, в которой указаны области устойчивого существования различных модификаций льда.

Переход из одной модификации в другую связан с перестройкой кристаллической решетки и перегруппировкой атомов. Вследствие малой подвижности атомов в твердых телах такие перегруппировки

сильно затруднены. Поэтому неустойчивая в данной области давлений и температур модификация часто может длительно существовать, не переходя в более устойчивую. Например, алмаз, образующийся и устойчивый при очень высоких давлениях и температурах, будучи охлажден до комнатной температуры, может существовать практически неограниченное время, не переходя в более устойчивый при этих условиях графит *).

Благодаря хаотичности теплового движения отдельные атомы на поверхности твердого тела могут время от времени отрываться от

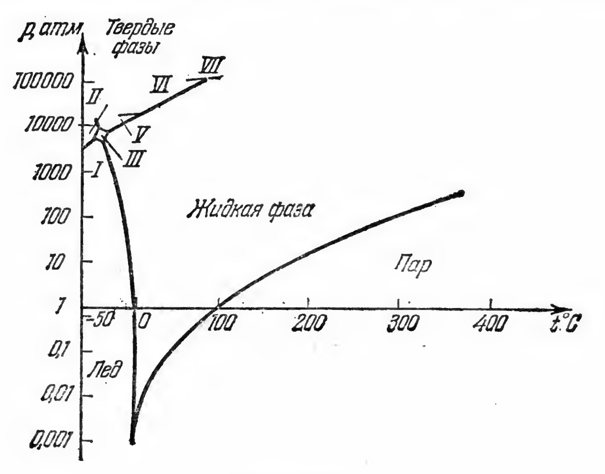


Рис. 3.53.

последнего и переходить в газовую фазу. Упругость насыщенного пара над твердым телом обычно ничтожно мала. С ростом температуры эта упругость быстро возрастает, так же как и в случае жидкостей. Поэтому некоторые твердые тела могут непосредственно возгоняться в пар, минуя жидкую фазу. Примерами таких тел могут служить кристаллический иод и нафталин. При медленном нагревании под нормальным давлением иод возгоняется, образуя фиолетовые пары. При охлаждении пара он сублимирует, т. е. образует сразу кристаллы твердого иода, минуя жидкую фазу.

---

*) В 1955 г. впервые удалось произвести фазовое превращение графита в алмаз, т. е. получить искусственные алмазы, подвергая графит в течение нескольких часов давлению свыше 100 000 атм при температуре свыше 2300 K. Это открытие весьма важно, так как алмазы — ценнейшее промышленное сырье: более 80% мировой добычи алмазов используется для промышленных нужд (инструменты для бурения скважин и др.). В настоящее время искусственные алмазы производятся у нас в промышленном масштабе.

§ 48. Тепловое движение в твердых телах

Независимо от природы сил, связывающих атомы твердого тела (валентные, кулоновские и т. д.), характер изменения этих сил с расстоянием r между центрами соседних атомов будет таким же, как и в жидкости и в реальном газе. При больших расстояниях между атомами (или другими элементами, составляющими кристаллическую решетку) преобладают силы притяжения, быстро убывающие с ростом r. При сближении атомов вплотную друг к другу начинает превалировать взаимное отталкивание электронных оболочек.

Общий вид зависимости сил и потенциальной энергии взаимодействия атомов от расстояния r вполне аналогичен картине, изображенной на рис. 3.2, *а* и *б*. При некотором значении $r = r_0$ силы

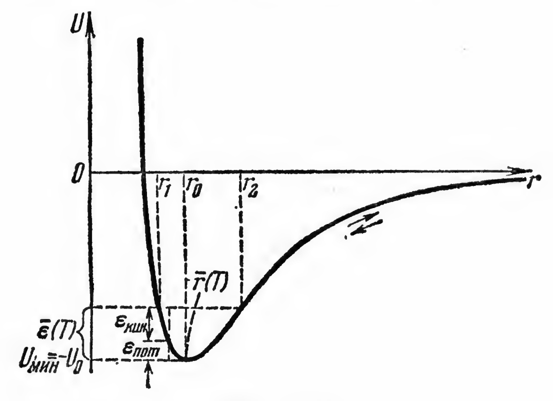


Рис. 3.54.

притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга, а потенциальная энергия взаимодействия в этом положении равновесия имеет глубокий минимум $U_{мин} = -U_0$, как это изображено на рис. 3.54.

При абсолютном нуле температуры атомы твердого тела должны располагаться в этих определенных положениях равновесия при $r = r_0$, а с ростом температуры начинают колебаться около этих положений равновесия. Если обозначить среднюю энергию этого колебательного движения вдоль r через $\bar{\varepsilon}(T)$ и отложить ее на графике рис. 3.54 вверх от значения $U_{мин}$, то уровень полной энергии $U_{мин} + \bar{\varepsilon}(T)$ пересечет кривую потенциальной энергии $U(r)$ в двух крайних точках r_1 и r_2, между которыми колеблется взаимное расстояние между атомами. На этом графике показано, как при промежуточных положениях $r_1 < r < r_2$ происходит непрерывный переход кинетической энергии колебательного движения $\varepsilon_{кин}$ в потенциальную $\varepsilon_{пот}$ и обратно. Этот схематический график позволяет

рассмотреть и проанализировать все основные термические характеристики твердых тел.

Теплоемкость. В § 33, гл. VIII, при анализе теплоемкости многоатомных молекул было показано (см. формулу (33.15)), что на одну колебательную степень свободы приходится средняя энергия теплового движения, равная

$$\bar{\varepsilon}(T) = \bar{\varepsilon}_{\text{кин}} + \bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT. \tag{48.1}$$

Колеблющийся атом в твердом теле обладает тремя степенями свободы перемещения в пространстве, т. е. может участвовать одновременно в колебательных движениях по трем независимым направлениям. На килограмм-атом кристаллического вещества приходится N_0 атомов, и такая система обладает $3N_0$ колебательными степенями свободы *).

Поскольку все атомы кристалла взаимосвязаны, то движение одного из них вызовет движение и соседних. В результате в каждом из $3N_0$ типов колебательного движения будут принимать участие все атомы решетки и каждое колебание будет происходить со своей характерной частотой. При не слишком низкой температуре все эти степени свободы будут возбуждены одинаково и полная энергия теплового движения составит

$$E = 3N_0\bar{\varepsilon}(T) = 3N_0kT = 3RT. \tag{48.2}$$

Отсюда количество теплоты, необходимое для нагревания одного килограмм-атома твердого тела на один градус, т. е. его теплоемкость, равно

$$C = \frac{dE}{dT} = 3R \approx 25 \quad \text{кДж/(кг-атом}\cdot\text{К)}. \tag{48.3}$$

Соотношение (48.3) было сначала установлено на опыте и носит название закона Дюлонга и Пти. В таком виде оно справедливо для одноатомных кристаллических решеток. Для более сложных решеток следует учитывать возможность колебаний и даже вращательных движений всех элементов решетки и внутренних движений в этих элементах.

Для пояснения этого рассчитаем теоретически удельную теплоемкость каменной соли. Для NaCl молекулярный вес $\mu = 23 + 35{,}5 = 58{,}5$ кг/кмоль. Следовательно, в 1 кг содержится $1/\mu = 0{,}0171$ кмоль NaCl. Однако в узлах решетки соли расположены не целые молекулы NaCl, а порознь ионы Na^+ и Cl^-, колеблющиеся независимо

---

*) Если быть абсолютно точным, то из этого огромного числа надо вычесть 3 поступательных и 3 вращательных степени свободы движения кристалла в целом, не принимающих участия в хаотическом тепловом движении.

друг от друга. Поэтому теплоемкость одного киломоля соли равна не 25 кДж/К, а вдвое больше. Следовательно, $C_{уд} = 0{,}0171$ кмоль/кг $\times$ $\times$ 50 кДж/(кмоль·К) = 0,85 кДж/(кг·К) в хорошем соответствии с экспериментом.

С понижением температуры, вследствие квантовых эффектов начинается постепенное «вымерзание» колебательных степеней свободы (см. § 33), и теплоемкость твердых тел постепенно уменьшается, стремясь к нулю при $T \to 0$, как это изображено на рис. 3.55.

Тепловое расширение. Возрастание амплитуды тепловых колебаний атомов является причиной расширения тел при нагревании. Из графика рис. 3.54 видно, что вследствие несимметричности кривой $U(r)$ среднее расстояние между соседними атомами при данной температуре $\bar{r} = (r_1 + r_2)/2$ больше r_0 и возрастает с ростом T. Относительное удлинение тела растет примерно пропорционально T:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\bar{r} - r_0}{r_0} \approx \alpha T, \quad (48.4)$$

где α — так называемый коэффициент линейного расширения твердого тела, имеющий обычно порядок 10^{-5} К$^{-1}$. Для анизотропных кристаллов потенциальные кривые взаимодействия с соседями $U(r)$ по разным направлениям различны. Различны в этом случае и значения взаимных расстояний, и коэффициенты линейного расширения по разным направлениям.

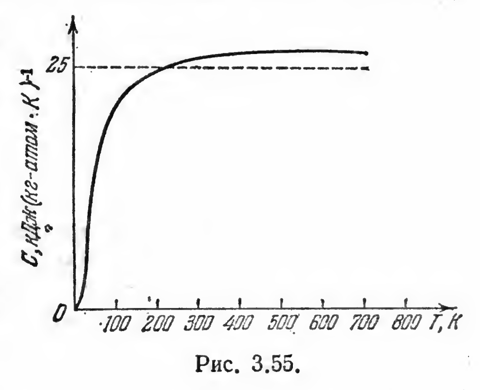


Рис. 3.55.

Хаотичность теплового движения и дефекты кристаллической решетки. Величина $\bar{\varepsilon}(T)$ представляет собой лишь среднюю энергию теплового движения, приходящуюся на одну степень свободы. Хаотичность теплового движения в твердом теле проявляется в том, что энергия колебаний на одних связях больше, а на других меньше средней, а для данной связи не остается постоянной. Время от времени на данной связи собирается энергия U_0, достаточная для ее разрыва и удаления атома из своего положения равновесия $r = r_0$ на бесконечность. Вероятность того, что такой разрыв произойдет за время одного периода колебаний τ_0, в соответствии с законом Больцмана (21.16) составляет

$$w_i = e^{-\frac{U_0}{kT}}. \quad (48.5)$$

Обратная величина $\frac{1}{w_i} = N_i = e^{\frac{U_0}{kT}}$ представляет собой среднее число колебаний, спустя которое атом сорвется из своего положения равновесия. Следовательно, среднее «время жизни» атома в положении равновесия составляет

$$\tau = \tau_0 N_i = \tau_0 e^{\frac{U_0}{kT}}. \qquad (48.6)$$

Сорванный атом попадает в межузловое пространство и медленно перемещается далее. Образовавшаяся при этом «дырка» (вакансия) в кристаллической решетке может также перемещаться за счет перескока в нее соседнего атома, как все это показано на рис. 3.45. При «встрече» сорванного из своего равновесного положения атома с вакансией они рекомбинируют, т. е. атом занимает нормальное положение и вакансия исчезает. В результате в кристалле устанавливается динамическое равновесие противоположных процессов «внутренней диссоциации» и «рекомбинации» (показанных на рис. 3.54 условно длинными стрелками) и среднее относительное число существующих в данный момент дефектов определяется соотношением (48.5).

Эта картина внешне похожа на характер теплового движения молекул в жидкости, описанного в § 45. Разница состоит в том, что жидкость за сорванной из своего положения временного равновесия молекулой смыкается и эти положения равновесия не постоянны в пространстве. В кристалле же, несмотря на наличие постоянно возникающих и рекомбинирующих дефектов, сохраняется дальний порядок, т. е. размещение устойчивых положений равновесия атомов — узлов кристаллической решетки в пространстве.

Изображенные на рис. 3.45 случаи сорванных атомов и вакансий не являются единственными типами дефектов, возникающих вследствие теплового движения. Так, в ионных кристаллах подобными точечными дефектами могут являться и ионы, сидящие в тех узлах, где положено находиться ионам противоположного знака.

Целый ряд дефектов в реальном кристалле возникает и в процессе его образования при кристаллизации. Даже в очень чистых условиях кристаллизующееся тело захватывает отдельные атомы примесей, имеющихся в расплаве или в растворе. Эти атомы могут располагаться как в межузловом пространстве, так и замещать атомы основного вещества в узлах кристаллической решетки, создавая локальные искажения последней.

Помимо точечных дефектов в процессе образования и роста кристалла могут возникать и линейные — так называемые д и с л о к а ц и и. Классический пример такой дислокации показан на рис. 3.56,

когда на некотором участке отсутствует часть плоскости с атомами, перпендикулярная чертежу, что привело к искажению решетки по обе стороны отсутствующей плоскости. Отмеченный на этом рисунке крестиком дефект представляет собой целую линию отсутствующих атомов, перпендикулярную плоскости чертежа.

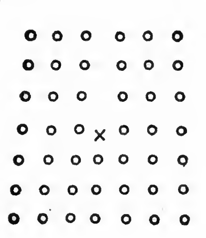


Рис. 3.56.

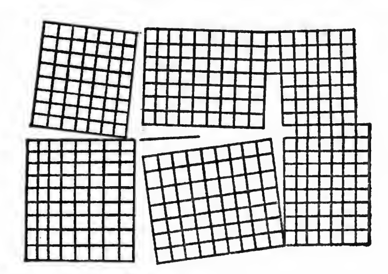


Рис. 3.57.

В процессе роста кристаллов возможно образование и более сложных винтовых дислокаций. Благодаря случайностям в процессе роста на образовавшейся грани направление осаждения следующих атомов может несколько измениться и возникают блочные структуры, схематически изображенные на рис. 3.57. В результате реальный кристалл как бы пронизан паутинной сетью различных нарушений. Классический же дальний порядок сохраняется лишь в промежутках между этими нарушениями, которые, правда, относительно велики и имеют линейную протяженность от 10^3 до 10^6 атомов.

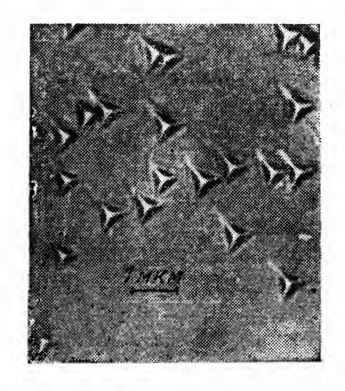


Рис. 3.58.

Тепловое движение воздействует и на все эти более сложные, не точечные дефекты кристаллической решетки. В результате хаотичности этого движения они перемещаются, деформируются, размножаются или зарастают. При определенных условиях удается выращивать тонкие и длинные нитевидные кристаллы, почти свободные от этих дефектов («усы»). Современные методы исследования позволяют исследовать, количественно измерять и наблюдать эти дефекты. Так на рис. 3.58 показана микрофотография поверхности монокристалла сурьмы, на которой видны вытравленные следы от выходящих на эту поверхность дислокаций.

§ 49. Механические свойства твердых тел. Упругость. Прочность

Изображенная на рис. 3.54 зависимость потенциальной энергии $U(r)$ взаимодействия соседних атомов в кристаллической решетке определяет, в соответствии с определениями § 6, силовую характеристику этого взаимодействия:

$$dU = -dA = -f\,dr \quad \text{и} \quad f(r) = -\frac{dU}{dr}. \qquad (49.1)$$

Примерный график этой зависимости изображен на рис. 3.59. Силы притяжения направлены против радиуса и поэтому считаются отрицательными, а силы отталкивания — положительными. При $r = r_0$ потенциальная энергия имеет минимум, а ее производная

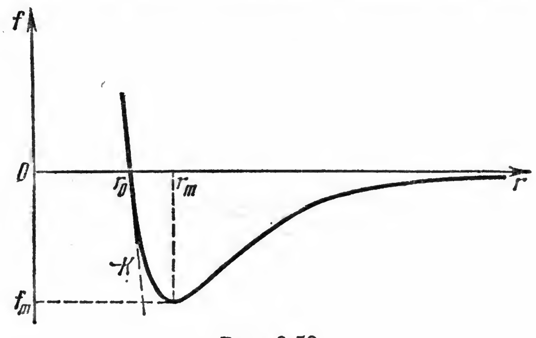


Рис. 3.59.

$f(r_0) = 0$. Таким образом, расстояние $r = r_0$ соответствует равновесию атомов, при котором сила их взаимодействия обращается в нуль. При удалении до $r > r_0$ $f(r) < 0$, т. е. возникает сила притяжения, возвращающая атомы в положение равновесия. При сближении до $r < r_0$ $f(r) > 0$, т. е. превалируют силы отталкивания, также возвращающие атомы в положение равновесия, которое, следовательно, является *устойчивым*. При малых относительных деформациях, $|\Delta r| = |r - r_0| \ll r_0$, в ту и другую сторону криволинейную зависимость f от r можно практически заменить прямой линией, показанной на рис. 3.59 пунктиром. Наклон этой касательной к кривой

$$\frac{\Delta f}{\Delta r} = \left(\frac{df}{dr}\right)_{r = r_0} = -K \qquad (49.2)$$

зависит от конкретного вида закона взаимодействия атомов данного вещества. Следовательно, при малых смещениях атома из положения равновесия на него будет действовать сила

$$f(r) = f(r_0) + \Delta f = 0 + \Delta f = -K\,\Delta r, \qquad (49.3)$$

под действием которой он должен будет возвратиться в положение равновесия.

Рассмотрим стержень длиной l и площадью поперечного сечения S (рис. 3.60). Мысленно расчленим его на ряд параллельных цепочек атомов. Число этих цепочек, приходящихся на единицу поперечного сечения, обозначим через n_0. При диаметрах атомов d площадь, занимаемая одним атомом в сечении, $\approx d^2$ и $n_0 \approx 1/d^2$. Если стержень равномерно растянут на длину $\Delta l \ll l$, то расстояние между каждой парой соседних атомов удлинится на пропорциональную величину $\Delta r = \frac{\Delta l}{l} r_0$. Вдоль каждой цепочки появятся препятствующие этому силы (49.3) и во всем сечении возникнет упругая сила

$$F_{упр} = f n_0 S = -K n_0 r_0 \frac{\Delta l}{l} S, \qquad (49.4)$$

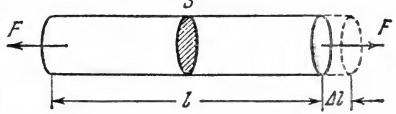


Рис. 3.60.

стремящаяся возвратить стержень в исходное состояние. Для удержания стержня в растянутом состоянии к нему следует приложить точно такую же положительную силу $F = -F_{упр}$. Входящий в (49.4) коэффициент пропорциональности

$$K n_0 r_0 = E$$

называется **модулем Юнга** (для растяжения $\Delta l > 0$ и сжатия $\Delta l < 0$), а само соотношение выражает известный закон Гука

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l}, \qquad (49.5)$$

относительное удлинение $\Delta l/l$ прямо пропорционально приложенному напряжению (т. е. растягивающему усилию на единицу площади $\sigma = F/S$).

По самому смыслу приведенного вывода очевидно, что применимость этого закона ограничена условием малости относительных деформаций:

$$\frac{|\Delta r|}{r_0} = \frac{|\Delta l|}{l} \ll 1. \qquad (49.6)$$

При удлинении атомных цепочек расстояния между атомами вдоль цепочек возрастают. При этом изменяется взаимодействие между соседними цепочками и они несколько сближаются друг с другом. Поэтому при растяжении стержня его поперечные размеры несколько уменьшаются, в первом приближении также прямо пропорционально напряжению σ.

Величина модуля упругости E различна для разных веществ. В монокристаллах вследствие их анизотропии значение E сущест-

венно зависит от направления деформации по отношению к осям кристаллической решетки. В поликристаллических телах отдельные соседние микрокристаллы («зерна») ориентированы самым беспорядочным образом и модуль E для всего тела имеет вполне определенное среднее значение, одинаковое для всех направлений. Для стали величина E достигает $2 \cdot 10^6$ кгс/см$^2 \approx 2 \cdot 10^{12}$ дин/см$^2 = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м$^2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Из рис. 3.59 видно, что при больших деформациях удлинение Δr растет быстрее, чем сила f, что обусловливает отклонение от закона Гука. При некотором вполне определенном расстоянии r_m между атомами сила притяжения принимает наибольшее возможное значение $|f_m|$. При дальнейшем растяжении тела силы взаимодействия между его атомами *падают* и уже не могут уравновесить первоначально приложенную нагрузку, и должен наступить *разрыв* образца. Из графика можно определить критическое разрывное напряжение для данного вещества

$$\sigma_{кр} = |f_m| n_0. \qquad (49.7)$$

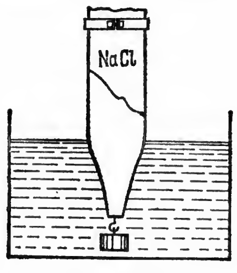


Рис. 3.61.

Для простейших ионных кристаллов величина $\sigma_{кр}$ была оценена теоретически. Опыт, однако, показал, что разрыв кристалла наступает при значениях σ, раз в 400 меньших, чем теоретически вычисленные. Одна из причин такого резкого понижения прочности реальных тел по сравнению с теоретической была объяснена А. Ф. Иоффе.

На поверхности твердого тела всегда имеются макроскопические трещины, неоднородности и другие дефекты. У краев этих трещин происходит концентрация напряжений, в результате которой трещины углубляются и в конечном счете прорастают сквозь образец, разрывая последний.

Для проверки этого предположения А. Ф. Иоффе поставил следующий опыт. Кристалл каменной соли был погружен одним концом в воду (рис. 3.61), которая непрерывно растворяла его поверхностный слой, содержащий макротрещины. В результате растворения поперечное сечение участка образца, погруженного в воду, сильно уменьшалось. Когда к такому растворяющемуся кристаллу был подвешен значительный груз, то образец разорвался не в тонком месте, а в широком сечении на воздухе, где оставался нарушенный поверхностный слой.

Помимо таких поверхностных нарушений, в реальных кристаллах, как указывалось выше в § 48, существуют многочисленные внутренние дефекты — блочная структура, дислокации. При приложении внешней нагрузки около них также возникает концентрация напряжений, приводящая к росту и размножению этих нару-

шений, что и облегчает разрыв образца. И действительно, когда стало возможным выращивать тонкие нитевидные почти бездефектные монокристаллы, то их прочность на разрыв приблизилась к теоретической.

Инженерный опыт уже давно показал, что разрывное напряжение $\sigma_{кр}$ не является вполне определенной величиной и зависит от температуры, а также от длительности и повторяемости нагрузки. Исследуя эти зависимости, С. Н. Журков предложил заменить понятие прочности, характеризуемой некоторой цифрой $\sigma_{кр}$, понятием **долговечности** «жизни» образца под нагрузкой до момента его разрыва. Количественная характеристика долговечности — время $\tau_{кр}$ до разрыва — является сложной функцией от напряжения σ и абсолютной температуры T. Как показано на рис. 3.62, зависимость $\tau_{кр}$ от σ очень крутая; сравнительно небольшое увеличение напряжения приводит к резкому сокращению долговечности.

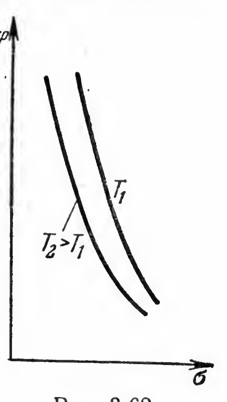


Рис. 3.62.

Согласно развиваемой С. Н. Журковым **кинетической теории прочности твердых тел**, нагруженный образец рвется за счет хаотического теплового движения. Непрерывно возникающие, как это было описано в предыдущем параграфе, дефекты кристаллической решетки уже не рассасываются, а начинают скапливаться, образуя микроскопические, а затем и макроскопические разрывы в образце. Чем выше температура T и больше приложенная нагрузка σ, тем быстрее накапливаются эти нарушения и тем раньше рвется образец.

Для пояснения механизма этих процессов и закономерностей используем графики (рис. 3.54 и 3.59) потенциальных и силовых взаимодействий между атомами и рассмотрим, какие изменения следует внести в эти кривые при наличии внешних растягивающих сил. Если стержень, изображенный на рис. 3.60, растягивать приложенными к обоим концам силами F, то каждая пара соседних атомов вдоль цепочки будет растягиваться силами $f_\sigma = \frac{F}{n_0 S} = \frac{\sigma}{n_0}$. Эти внешние положительные силы добавятся к силам взаимодействия, и полная сила, действующая между атомами, будет уже равна

$$f_{полн} = f(r) + \frac{\sigma}{n_0}. \qquad (49.8)$$

График этой зависимости $f_{полн}$ от r, изображенный на рис. 3.63, отличается от графика рис. 3.59 тем, что вся кривая поднята на

величину σ/n_0. Благодаря этому, в отличие от ненагруженного тела, эта кривая пересекает ось абсцисс уже в двух точках, что соответствует двум возможным положениям равновесия, при которых действующая между соседними атомами суммарная сила обращается в нуль. Левая точка пересечения по-прежнему соответствует положению устойчивого равновесия, когда благодаря растягивающим усилиям равновесное расстояние между атомами возрастает на некоторую небольшую величину

$$\Delta r = \frac{f_\sigma}{K} = \frac{\sigma}{Kn_0} = r_0 \frac{\sigma}{E}. \qquad (49.9)$$

Вторая, правая точка пересечения суммарной кривой с осью абсцисс при $r = r^*$ соответствует теперь неустойчивому равновесию. При $r < r^*$ преобладают силы притяжения и атомы сближаются до расстояния $r_0 + \Delta r$, соответствующего левой точке

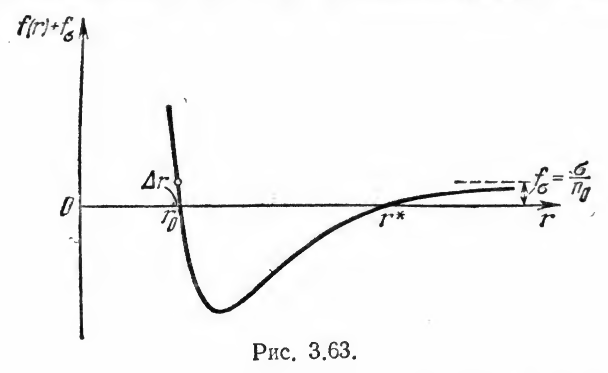


Рис. 3.63.

устойчивого равновесия. Если же расстояние между атомами почему-либо станет больше r^*, то начнет преобладать действие растягивающих усилий f_σ и атомы будут расходиться друг от друга до бесконечности.

Наличие растягивающих усилий f_σ изменит и кривую потенциальной энергии. Изменение последней ΔU, в соответствии с определением (6.5), может быть рассчитано по работе, совершаемой силой f_σ при растяжении от равновесного расстояния r_0 до данного значения r. Считая внешнее усилие f_σ не зависящим от r, получаем

$$\Delta U = -\Delta A = -f_\sigma (r - r_0). \qquad (49.10)$$

На графике рис. 3.64 тонкой линией проведена кривая зависимости $U(r)$ для межатомного взаимодействия, которая уже была изображена на рис. 3.54. Пунктиром на рис. 3.64 изображена наклонная прямая (49.10) добавочной потенциальной энергии ΔU. Получившаяся при сложении этих кривых зависимость суммарной энергии

$$U(r) + \Delta U(r) = U(r) - f_\sigma (r - r_0) \qquad (49.11)$$

изображена на том же графике жирной линией. Левой точке устойчивого равновесия сил соответствует *минимум* потенциальной кривой, немного сдвинутой относительно первоначального, когда $\sigma = 0$. Правой же точке неустойчивого равновесия сил соответствует *максимум* потенциальной кривой при $r = r^*$.

Образовавшийся таким образом горб потенциальной энергии разделяет собой две области возможных состояний. Слева от него находятся состояния, при которых атомы остаются связанными в слегка растянутой кристаллической решетке. Справа же от горба находятся состояния, при которых эти связи разрываются за счет работы внешних растягивающих усилий. Благодаря работе, совершаемой последними при растяжении, состояние тела с разорванными связями всегда имеет более низкую потенциальную энергию,

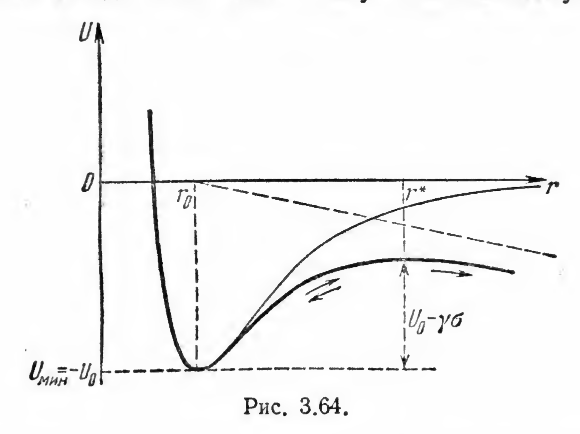


Рис. 3.64.

т. е. энергетически выгоднее состояния, в котором атомы связаны с кристаллической решеткой. Для перехода из связанного в разорванное состояние атому необходимо лишь преодолеть энергетический барьер $U_{макс} - U_{мин}$, аналогичный энергии активации при химических реакциях. Как видно из рис. 3.64, при не слишком малых напряжениях величина r^* сравнительно медленно изменяется с ростом σ, высота энергетического барьера примерно линейно изменяется с напряжением и

$$U_{макс} - U_{мин} \approx U_0 - (r^* - r_0)\frac{\sigma}{n_0} = U_0 - \gamma\sigma. \qquad (49.12)$$

Коэффициент пропорциональности $\gamma \approx \frac{r^* - r_0}{n_0} \approx (r^* - r_0)\, d^2 \approx \approx d^3$, т. е. порядка объема атома $\approx 10^{-23}$ см³.

Благодаря хаотичности теплового движения время от времени на данной связи может концентрироваться кинетическая энергия, достаточная для преодоления барьера, и связь разрывается. Как

указывалось в предыдущем параграфе, величиной энергетического горба определяется среднее время этого перехода. Аналогично (48.6) оно должно составлять

$$\tau_{кр} \approx \tau_0 e^{\frac{U_0 - \gamma\sigma}{kT}}. \qquad (49.13)$$

В ненагруженном образце сорванный со своего места атом обладал избыточной потенциальной энергией и в конце концов вновь занимал равновесное положение. В отличие от этого, в нагруженном образце атом, «взобравшийся» на вершину потенциального барьера

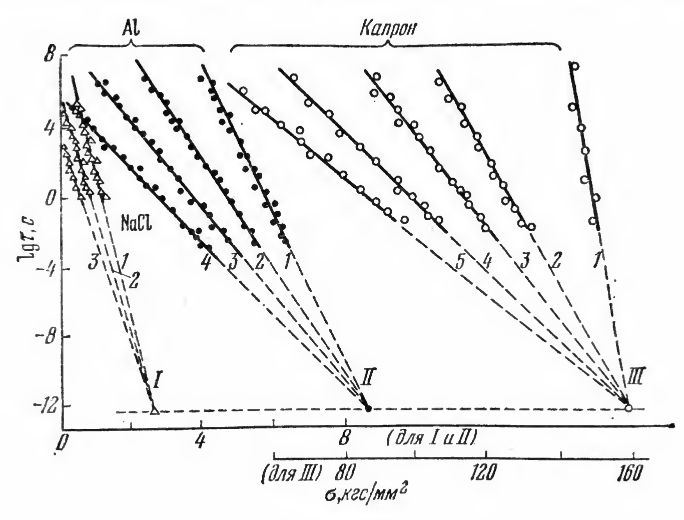


Рис. 3.65.

(рис. 3.64), «скатывается» с него по указанной на рисунке стрелке вправо, где его потенциальная энергия снижается, и не возвращается обратно. Количество разорванных связей нарастает, и образец рвется в том месте, где эти микроскопические разрывы скапливаются. Таким образом, величину (49.13) можно отождествить с *долговечностью* образца при данной нагрузке σ и температуре T.

Из (49.13) следует, что при абсолютном нуле температуры ($T = 0$) $\tau_{кр} \to \infty$.

В отсутствие теплового движения нагруженный образец должен только растягиваться и не рваться, пока не будет достигнута нагрузка $\sigma_{кр} = \frac{|f_m|}{n_0}$, соответствующая теоретической прочности материала. При очень малых напряжениях приближенная зависимость (49.13) перестает быть справедливой ввиду роста ширины

энергетического барьера и долговечность с уменьшением нагрузки должна возрастать еще быстрее, так чтобы в пределе $\sigma = 0$, т. е. для ненагруженного образца, $\tau_{кр} = \infty$.

Если прологарифмировать равенство (49.13), то

$$\ln \tau_{кр} = \ln \tau_0 + \frac{U_0}{kT} - \frac{\gamma}{kT}\sigma = A - B\sigma, \qquad (49.14)$$

т. е. логарифм долговечности должен линейно уменьшаться с напряжением. Для каждой температуры эти прямые в координатах $\ln \tau_{кр}$ — σ должны иметь различный наклон $B = \gamma/kT$ и при своем продолжении должны пересекаться в одной точке с координатами $\sigma = U_0/\gamma$ и $\tau = \tau_0$.

Этот качественный вывод довольно хорошо подтверждается на опыте. На рис. 3.65 приведены в полулогарифмических координатах результаты измерений долговечности при одноосной нагрузке для представителей трех типов кристаллических веществ — неорганического соединения, металла и органического полимера — при нескольких температурах. Для каждого вещества пучки прямых (49.14) сходятся к одной точке $\tau = \tau_0 \approx 10^{-13}$ с, т. е. времени порядка одного периода колебания атома (иона, молекулы) в кристаллической решетке. Величины U_0 для каждого вещества близки к теплотам сублимации, т. е. отрыва атома от всех окружающих его соседей. Коэффициенты пропорциональности γ имеют порядок величины $(1 \div 100) \cdot 10^{-23}$ см^3. В поликристаллических и подвергнутых сильной механической обработке образцах, по-видимому, благодаря неравномерности распределения напряжения и локальным его концентрациям величина γ повышается по сравнению с монокристаллом.

ЧАСТЬ IV
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ГЛАВА XIII
ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 50. Кинематика гармонического колебания

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. Качание маятника часов, волны на воде, переменный электрический ток, свет, звук являются примерами колебаний различных физических величин. При движении маятника колеблется координата его центра тяжести. В случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Эти два процесса качественно совершенно различны по своей физической природе. Однако количественные закономерности этих процессов имеют между собой очень много общего.

Основные характеристики колебательных процессов мы изучим сначала на примере механических колебаний материальной точки. Ранее мы уже познакомились с другими типами механических движений — поступательным и вращательным. Материальная точка M, обладающая одной степенью свободы и движущаяся вдоль некоторой линии, может с течением времени сколько угодно удаляться от своего исходного положения; такое движение называется чисто поступательным. В противоположность этому колебательным мы будем называть такое движение, когда точка M не выходит за пределы какого-либо отрезка KL на этой линии и многократно проходит через одни и те же положения внутри KL.

Если, кроме того, существует такой промежуток времени T, что каждый раз спустя время T все движение точки M в точности повторяется, то колебание мы назовем *периодическим*. Промежуток времени T, в конце которого точка оказывается в том же положении и движется с той же скоростью, как и в его начале, называется *периодом колебания*. Простейшим случаем периодического колебания будет так называемое *гармоническое колебательное движение*, к рассмотрению которого мы и перейдем.

Представим себе произвольную точку D, равномерно вращающуюся по окружности радиуса A против часовой стрелки с постоян-

ной угловой скоростью ω радианов в секунду (рис. 4.1). Уравнение движения точки D примет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{50.1}$$

где φ — угол поворота подвижного радиуса OD относительно неподвижного OK, а φ_0 — начальное значение угла φ в момент времени $t = 0$.

По мере того как точка D будет вращаться по окружности от K к L и, далее, снова к K, проекция точки D на диаметр LK — точка M — будет двигаться вдоль отрезка KL от одного из его концов к другому и обратно, т. е. будет совершать колебательное движение. Обозначим расстояние OM этой точки от центра через x. Тогда уравнение движения точки M примет вид

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{50.2}$$

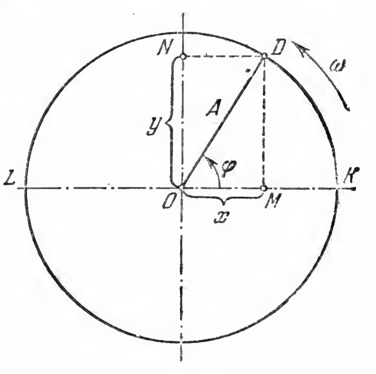


Рис. 4.1.

Выбор начального момента отсчета времени совершенно произволен. Мы можем выбрать этот момент так, что φ_0 будет равно нулю. При этом уравнение гармонического колебания (50.2) примет вид

$$x = A\cos\varphi = A\cos\omega t. \tag{50.3}$$

В дальнейшем воспользуемся тем обстоятельством, что добавка φ_0 в аргумент косинуса не меняет характера движения, а означает лишь изменение начального момента в отсчете времени.

Функция $\cos\omega t$ является простейшей периодической функцией от времени с периодом $T = 2\pi/\omega$. Действительно, спустя промежуток времени T функция $\cos\omega t$ примет значение

$$\cos\omega(t+T) = \cos\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos(\omega t + 2\pi),$$

равное своему первоначальному значению $\cos\omega t$. Таким образом, точка M совершает периодическое колебание. Подобное простейшее периодическое колебание, при котором смещение x меняется со временем по закону косинуса (или синуса, что безразлично, так как одну из этих функций можно перевести в другую изменением φ_0 или, что то же, изменением начального момента времени), называется **гармоническим колебанием**.

Нетрудно видеть, что проекция точки D на вертикальный диаметр, т. е. точка N на рис. 4.1, также совершает гармоническое колебание по закону

$$y = A\sin\varphi = A\sin\omega t = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{50.4}$$

(Легко сообразить, что гармоническое колебательное движение будет также совершать и проекция точки D на любую прямую, проходящую или не проходящую через O.)

На рис. 4.2 приведен график зависимости x от t по уравнению (50.2). Поскольку $\cos\varphi$ меняется в пределах от $+1$ до -1, то смещение x точки M от центра колебаний O находится в пределах

$$-A \leqslant x \leqslant +A.$$

Максимальная величина этого смещения $|x|_{макс} = A$ называется амплитудой колебания.

Аргумент $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, стоящий под знаком косинуса и определяющий, таким образом, долю (равную $\cos\varphi$), которую смещение x составляет от максимального, называется фазой колебания или, коротко, фазой.

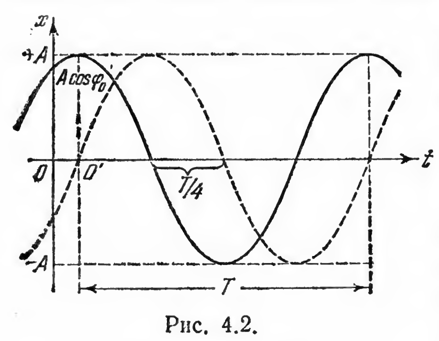


Рис. 4.2.

Величина φ_0 есть соответственно начальная фаза колебания. Сопоставляя (50.4) с (50.3), мы видим, что колебание точки N, изображенное на рис. 4.2 пунктиром, отстает по фазе от колебаний точки M на $\pi/2$, т. е. по времени на четверть периода $T/4$ (поскольку весь период T, как мы видели выше, соответствует изменению фазы на 2π). На графике отмечена точка O' — другое начало отсчета времени t, при котором φ_0 принимает нулевое значение, а уравнение колебания приобретает более простой вид (50.4).

Величина ω, характеризующая угловую скорость вращения точки D, называется угловой частотой гармонического колебания точки M. Она связана с периодом T и обычной частотой ν (числом колебаний за единицу времени)

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{50.5}$$

соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{50.6}$$

В электро- и радиотехнике для измерения частот ν принята единица, носящая название герца (Гц)

1 Гц = 1 колебание в секунду.

При гармоническом колебательном движении смещение точки M меняется со временем по закону (50.3). Дифференцируя это выра-

жение по t, находим скорость движения точки M в любой момент времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (50.7)$$

Дифференцируя (50.7) еще раз по t, найдем ускорение колеблющейся точки:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} =$$
$$= -\omega^2 A \cos \omega t =$$
$$= \omega^2 A \cos(\omega t + \pi). \qquad (50.8)$$

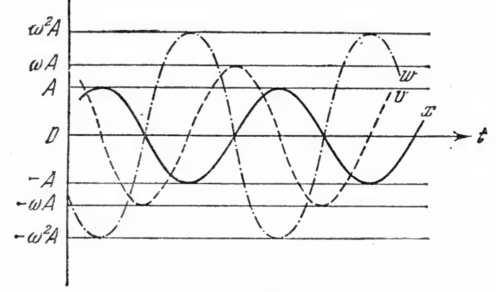


Рис. 4.3.

Мы видим, что скорость и ускорение колеблющейся точки меняются со временем также по гармоническому закону, с той же самой угловой частотой ω и периодом $T = 2\pi/\omega$. Амплитуда скорости равна $v_0 = \omega A$, а амплитуда ускорения $w_0 = \omega^2 A$. Колебания скорости опережают колебания смещения по фазе на $\pi/2$ (или отстают по фазе на $3\pi/2$, что одно и тоже), а колебания ускорения опережают колебания смещения по фазе на π (или отстают на π), как это изображено на рис. 4.3. Подробнее соотношение между этими величинами мы рассмотрим в следующем параграфе, в котором в круг рассматриваемых величин войдут также и силы.

§ 51. Упругие и квазиупругие силы

Выясним, воспользовавшись законами динамики, какими силами вызываются гармонические колебания.

По второму закону динамики сила F, действующая на материальную точку, численно равна произведению массы точки m на ее ускорение w. Подставляя в это соотношение найденное выше выражение w для гармонического колебания, определим значение силы

$$F = mw = -m\omega^2 A \cos \omega t, \qquad (51.1)$$

действующей на точку в каждый момент времени. Сравнивая (51.1) с (50.3), замечаем, что

$$F = -m\omega^2 x = -kx, \quad k = m\omega^2, \qquad (51.2)$$

т. е. сила, вызывающая гармоническое колебание, обладает двумя важными свойствами:

1) *величина силы прямо пропорциональна смещению точки от центра колебания;*

2) *направление силы противоположно направлению смещения, т. е. сила всегда направлена к центру* (при $x > 0$ $F < 0$, а при $x < 0$ $F > 0$).

Кроме того, из (51.2) следует, что при $x = 0$ и $F = 0$, т. е. в центре колебания O на точку M сила не действует. Иными словами, *центр колебаний является положением равновесия точки M.*

Рассмотрим движение материальной точки массы m под действием упругой пружины (рис. 4.4), массой которой мы пренебрежем. Точка движется вдоль горизонтальной оси x так, что сила тяжести не оказывает влияния на ее движение. Точка O на оси x отвечает положению равновесия материальной точки, т. е. положению, при котором пружина не деформирована (рис. 4.4, *а*).

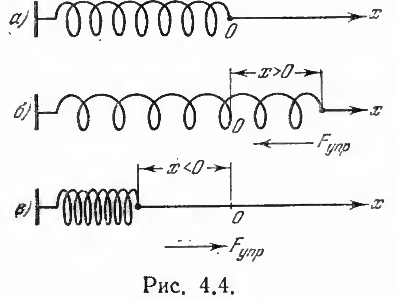


Рис. 4.4.

При смещении точки вправо на величину x (рис. 4.4, *б*) на нее будет действовать сила F упругости растянутой пружины, равная по закону Гука

$$F_{\text{упр}} = -kx < 0. \qquad (51.3)$$

Эта сила направлена влево ($F < 0$), т. е. к положению равновесия — точке O.

При смещении материальной точки влево от O на величину x (рис. 4.4, *в*) на нее будет действовать сила

$$F_{\text{упр}} = -kx > 0, \qquad (51.4)$$

направленная вправо ($F > 0$), так как $x < 0$.

Следовательно, при любых смещениях от положения равновесия, т. е. от точки O, материальная точка будет находиться под воздействием силы, направленной к O и равной

$$F_{\text{упр}} = -kx. \qquad (51.5)$$

Сравнивая (51.2) и (51.5), видим, что материальная точка m, будучи выведена из состояния равновесия, начнет совершать гармонические колебания.

Коэффициент k есть коэффициент упругости, или жесткость пружины. Численно он равен силе, которую нужно приложить к пружине, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины.

Частоту колебаний материальной точки m под действием пружины (массой которой мы пренебрегаем) с коэффициентом упругости k можно получить из (51.2) и (51.5):

$$m\omega^2 = k,$$

т. е.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (51.6)$$

что отвечает периоду T, равному

$$T=\frac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (51.7)$$

Частота и период не зависят от амплитуды колебаний и определяются только величинами m и k. *Амплитуда и фаза колебания* (или начальная фаза φ_0) *определяются из начальных условий*, при которых возникло движение.

Аналогичное гармоническое движение возникает и при движении груза m, подвешенного на пружине (см. рис. 1.19). Отличие от рассмотренного выше случая состоит в том, что положение равновесия будет иметь место при несколько растянутой пружине. Упругая сила растяжения в положении равновесия в точности равна силе тяжести и, будучи направлена вверх, уравновешивает ее.

Чтобы материальная точка m совершала гармоническое колебательное движение, не обязательно, чтобы на нее действовали именно упругие силы. Достаточно, чтобы сила при смещении от положения равновесия менялась согласно закону (51.2):

$$F=-kx.$$

Рис. 4.5.

Если сила, не являющаяся по своей природе упругой, подчиняется закону (51.2), то она называется «квазиупругой силой» (по-латыни «quasi» означает «как бы»).

Рассмотрим теперь движение материальной точки под действием квазиупругой силы (рис. 4.5) детальнее. Пусть в начальный момент материальная точка смещена в положение A и скорость ее равна нулю (рис. 4.5, *а*):

$$x=A\cos\omega t\,|_{t=0}=A,$$
$$v=-\omega A\sin\omega t\,|_{t=0}=0,$$
$$w=-\omega^2 A\cos\omega t\,|_{t=0}=-\omega^2 A.$$

В этом положении на точку действует квазиупругая сила F, равная

$$F=-kA=-m\omega^2 A$$

и направленная влево. Под действием этой силы точка m будет двигаться влево с ускорением

$$w=\frac{F}{m}=-\omega^2 A.$$

В течение первой четверти периода ($0 < t < T/4$) будет происходить ускоренное движение точки от A к O. Скорость ее будет возрастать по величине вплоть до точки O, достигая в ней значения:

$$v = -\omega A \sin \omega t \,\Big|_{t=\frac{T}{4}} = -\omega A \sin \omega \frac{2\pi}{4\omega} = -\omega A \sin \frac{\pi}{2} = -\omega A = -v_0$$

при

$$x = A \cos \omega t \,\Big|_{t=\frac{T}{4}} = A \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

В точке O сила и ускорение обращаются в нуль (рис. 4.5, *б*), а затем, после ее прохождения, меняют знак. В течение второй четверти периода, т. е. в пределах

$$\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2},$$

материальная точка движется влево ($v < 0$) от O к $-A$ под действием силы, направленной вправо ($F > 0$) (рис. 4.5, *в*). Движение происходит замедленно, и в точке $x = -A$ материальная точка останавливается с тем, чтобы двинуться от $x = -A$ к $x = 0$ и, далее, к $x = +A$. Это движение происходит так же, как и разобранное выше движение от $x = A$ к $x = 0$ и $x = -A$, а затем весь цикл повторяется.

Таким образом, при движении m от крайних точек к O скорость и сила (ускорение) параллельны и скорость возрастает, достигая наибольшего значения в положении равновесия. При удалении от точки равновесия скорость и сила (ускорение) направлены противоположно, движение происходит замедленно и скорость обращается в нуль в крайних точках.

Эта физическая картина количественно описывается формулами § 50. Сдвиг фаз между координатой x и скоростью v на $\pi/2$ отвечает тому, что при $x = 0$ скорость v достигает максимума и, наоборот, при $|x|_{\text{макс}}$ скорость обращается в нуль. Сдвиг фаз между координатой x и ускорением w на π означает, что координата и ускорение всегда имеют противоположные знаки.

Гармоническое колебательное движение играет исключительно большую роль в природе и технике. Поэтому следует хорошо представлять себе все этапы этого движения, описанные выше, смысл фазовых отношений координат, скоростей и ускорений (сил).

Рассмотрим примеры гармонического колебательного движения под действием квазиупругих сил.

Пример 1. Колебания маятника. Маятник стенных часов представляет собой тяжелый груз, который укреплен на длинном тонком стержне, подвешенном шарнирно на горизонталь-

ной оси C, перпендикулярной к стержню (рис. 4.6). На маятник действует сила веса $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, приложенная в центре его тяжести O, и реакция опоры на оси. Отклоним маятник на некоторый угол φ от вертикали. Тогда на него будет действовать момент внешней силы относительно оси вращения (момент реакции опоры, проходящей через эту ось, равен нулю)

$$M = -mgl\sin\varphi, \tag{51.8}$$

где l — расстояние от центра тяжести до оси вращения. Знак минус показывает, что этот момент направлен в сторону уменьшения угла поворота φ.

Под действием приложенного момента маятник начнет вращаться с переменной угловой скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и угловым ускорением $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Обозначив момент инерции маятника относительно оси вращения через I, можно записать второй закон динамики вращательного движения (11.16) в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi. \tag{51.9}$$

Центр тяжести маятника движется по дуге окружности постоянного радиуса, и смещение его от положения равновесия $x = l\varphi$. Переходя к переменной x и умножая обе части равенства на ml/I, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m^2gl^2}{I}\sin\left(\frac{x}{l}\right). \tag{51.10}$$

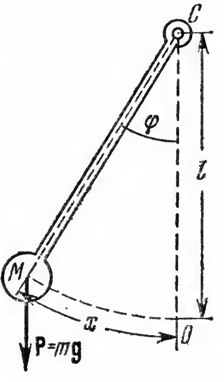


Рис. 4.6.

Для малых углов отклонения от вертикали, не превышающих 5—6°, с достаточной степенью точности можно заменить $\sin\varphi$ самим углом φ (в радианах $\varphi = x/l$). Тогда уравнение движения центра тяжести (51.10) перепишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m^2gl}{I}x. \tag{51.11}$$

Это уравнение эквивалентно уравнению движения материальной точки массы m, движущейся под действием квазиупругой силы

$$F_{\text{кв-упр}} = -\frac{m^2gl}{I}x, \tag{51.12}$$

с коэффициентом пропорциональности $k = m^2gl/I$ (см. (51.5)). Следовательно, центр тяжести маятника будет двигаться по дуге окружности, совершая гармоническое колебание с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \tag{51.13}$$

Амплитуда этого колебания A и начальная фаза φ_0 будут зависеть от начального смещения и начальной скорости. В идеализированном случае, когда можно пренебречь массой стержня и считать, что масса груза сосредоточена в центре его тяжести, момент инерции системы относительно оси вращения равен $I = ml^2$. Период колебаний такого, так называемого математического, маятника

$$T_{\text{ид}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{51.14}$$

не зависит от его массы. Чтобы выразить в таком же виде зависимость периода колебаний реального, или физического, маятника от его параметров, вводят приведенную (эквивалентную) длину последнего

$$l_э = \frac{I}{ml}. \tag{51.15}$$

Из (51.15) можно определить приведенную длину секундного маятника, т. е. маятника, время качания которого $T/2$ составляет 1 с в данной точке земного шара. И наоборот, зная эквивалентную длину данного маятника $l_э$ и перенося его с места на место, можно определять величину ускорения поля земного тяготения. Поскольку Земля является не точным шаром, а эллипсоидом, несколько сплюснутым у полюсов, и, кроме того, на тела действуют центробежные силы, особенно заметные на экваторе, то величина g зависит от географической широты и на полюсе несколько больше, чем на экваторе, как это видно из приводимой ниже таблицы.

Положение точки	Географическая широта, °	Ускорение земного тяготения, м/с²
Полюс . . .	90	9,83219
Москва . . .	53	9,81558
Экватор . .	0	9,78049

Таким образом, если перенести на полюс стенные часы, выверенные на экваторе, то период колебаний маятника уменьшится и часы начнут уходить вперед на 3,8 минуты за сутки. Чтобы эти часы на полюсе шли верно, придется увеличить $l_э$, т. е. передвинуть груз маятника вдоль стержня дальше от оси. Подобным передвижением груза следует регулировать ход часов с маятником и в других случаях. Если часы отстают, то надо передвигать груз ближе к оси, и наоборот.

Пример 2. Вертикальные колебания корабля. Плавающий корабль погружается в воду до уровня, при котором по закону Архимеда вес вытесненной им воды равен

весу корабля с грузом (рис. 4.7, *а*). Если по каким-либо внешним причинам, например при волнах, корабль случайно погрузится глубже на величину x (рис. 4.7, *б*), то подъемная сила увеличится и корабль будет выталкиваться к поверхности. Избыточная сила F_x, действующая на погруженный корабль, будет равна весу воды в объеме, заштрихованном на рис. 4.7, *б*. Обозначая плотность воды через ρ, получаем:

$$F_x = -g\rho Sx, \qquad (51.16)$$

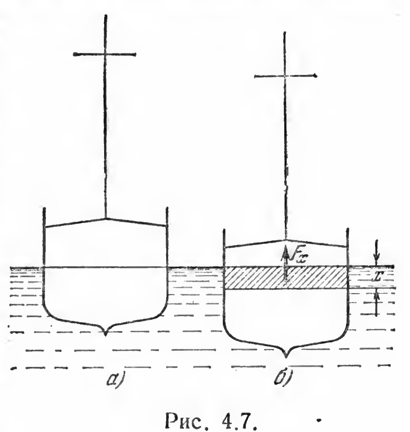


Рис. 4.7.

где S — площадь горизонтального сечения корабля на уровне воды. Сравнивая (51.16) и (51.5), видим, что на погруженный корабль действует квазиупругая сила с коэффициентом $k = g\rho S$, и, следовательно, он будет совершать вертикальные гармонические колебания по закону (50.4) с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g\rho S}}, \qquad (51.17)$$

где m — масса корабля. Для грузового судна водоизмещением 10 000 т и площадью горизонтального сечения на уровне ватерлинии $S = 1000$ м^2 период вертикальных колебаний составит $T \approx 6$ с.

§ 52. Энергия гармонических колебаний

При гармоническом колебательном движении кинетическая энергия колеблющейся материальной точки непрерывно меняется. Меняется и потенциальная энергия взаимодействия между точкой и окружающими телами, приводящего к появлению квазиупругих сил.

Это есть энергия не самой материальной точки (например, это — энергия деформированной пружины или энергия взаимодействия маятник — Земля). Однако для нас это обстоятельство не существенно. Мы можем не интересоваться природой возникновения сил взаимодействия, зная, что сила квазиупруга, и зная коэффициент k. Как сила, так и потенциальная энергия при этом определяются положением колеблющейся точки m, т. е. ее координатой x.

Поэтому мы будем в дальнейшем как кинетическую, так и потенциальную энергию относить к самой колеблющейся материальной точке m.

Полная энергия механического движения есть сумма кинетической и потенциальной энергий. Согласно (50.7) кинетическая энергия гармонически колеблющейся точки массы m равна

$$E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{2}=\frac{m\omega^2A^2}{2}\sin^2\omega t=\frac{m\omega^2A^2}{2}\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (52.1)$$

Пользуясь известным тригонометрическим равенством

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi),$$

перепишем выражение для кинетической энергии в таком виде:

$$E_{\text{кин}}=\frac{m\omega^2A^2}{4}\left[1+\cos 2\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{m\omega^2A^2}{4}[1+\cos(2\omega t+\pi)]. \quad (52.2)$$

Таким образом, $E_{\text{кин}}$ меняется со временем также по гармоническому закону, но по сравнению с координатой x — с удвоенной частотой. Кроме того, значение $E_{\text{кин}}$ колеблется не около нуля, но около $\frac{m\omega^2A^2}{4}$, меняясь от нуля до $\frac{m\omega^2A^2}{2}$, как это показано на рис. 4.8. Физически удвоение частоты колебания $E_{\text{кин}}$ по сравнению с x объясняется просто. Кинетическая энергия дважды за период обращается в нуль в точках, где $v=0$, — крайних точках движения. Максимального значения $E_{\text{кин}}$ достигает также два раза за период при прохождении точки $x=0$, где скорость v максимальна. В силу того, что в (52.1) скорость входит во второй степени, знак ее не существен, т. е. $E_{\text{кин}}$ принимает последовательно при движении от $-A$ к A те же значения, что и при движении от A к $-A$.

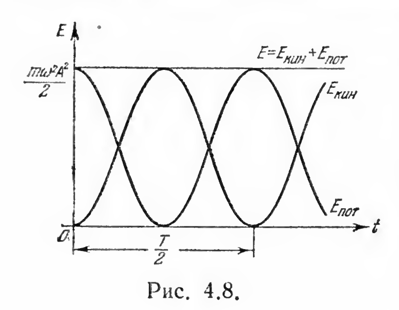


Рис. 4.8.

При вычислении потенциальной энергии квазиупругих сил условимся отсчитывать ее от положения равновесия, т. е. положим, что при $x=0$ $E_{\text{пот}}=0$. Тогда потенциальная энергия в точке x будет численно равна работе квазиупругой силы, совершенной при перемещении из положения равновесия в данную точку и взятой с обратным знаком:

$$E_{\text{пот}}=-\int_0^x F_{\text{кв-упр}}\,dx=\int_0^x kx\,dx=\frac{kx^2}{2}.$$

Подставляя вместо x его значение по уравнению (50.3), получим окончательно:

$$E_{\text{пот}}=\frac{kA^2\cos^2\omega t}{2}=\frac{m\omega^2A^2}{2}\cos^2\omega t=\frac{m\omega^2A^2}{4}[1+\cos 2\omega t]. \qquad (52.3)$$

Следовательно, потенциальная энергия $E_{пот}$ меняется с частотой 2ω и в тех же пределах, что и $E_{кин}$, но со сдвигом фазы относительно $E_{кин}$ на π. График изменения $E_{пот}$ со временем приведен на том же рис. 4.8.

Найдем теперь полную энергию E материальной точки m, совершающей гармоническое колебательное движение с частотой ω и амплитудой A (напомним, что мы условились $E_{пот}$ также относить к точке m):

$$E = E_{кин} + E_{пот} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}[\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t] = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (52.4)$$

так как по известному тригонометрическому соотношению сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же угла всегда равна единице.

Таким образом, полная энергия гармонически колеблющейся точки есть величина постоянная и пропорциональная квадрату амплитуды колебаний A^2 (см. рис. 4.8). В процессе движения происходит непрерывный переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, но сумма их остается при этом постоянной. Когда точка проходит через положение равновесия $x = 0$, потенциальная энергия обращается в нуль, а кинетическая максимальна и равна полной. Когда же колеблющаяся точка доходит до одного из своих крайних положений $x = \pm A$, то $v = 0$, кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная максимальна и равна полной.

§ 53. Сложение гармонических колебаний

Пусть на материальную точку действует несколько различных упругих или квазиупругих сил. Каждая из этих сил заставляет точку совершать гармоническое колебательное движение. При одновременном воздействии этих сил точка будет одновременно участвовать во всех этих движениях. С такими примерами сложения гармонических колебаний мы встретимся ниже, в гл. XIV, при рассмотрении суперпозиции и интерференции волн.

Различные звуковые волны, одновременно воспринимаемые нашим ухом, заставляют барабанную перепонку принимать участие сразу в нескольких гармонических колебаниях. Электромагнитные волны, приходящие одновременно от ряда радиостанций, возбуждают в приемном контуре электрические колебания различных частот. Аналогичным образом складываются и различные синусоидальные переменные токи, подходящие по нескольким проводам к точке разветвления цепи, например при соединении потребителей трехфазного переменного тока на «звезду».

При сложении двух гармонических колебаний одного направления получается колебательное движение, вообще говоря, более сложное. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Сложение колебаний с одинаковыми периодами. Пусть материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях с одинаковым периодом T и угловой частотой $\omega = 2\pi/T$, но с различными начальными фазами и амплитудами:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \varphi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) \\ \text{и} \quad x_2 &= A_2 \cos \varphi_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20}). \end{aligned}\right\} \tag{53.1}$$

Тогда результирующее смещение точки равно алгебраической сумме обоих смещений:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20}). \tag{53.2}$$

Поскольку x_1 и x_2, спустя промежуток времени T, возвращаются к своим первоначальным значениям, то их сумма x представляет собой периодическое колебательное движение с тем же самым периодом T. Для более точного анализа характера этого движения построим так называемую векторную диаграмму (рис. 4.9).

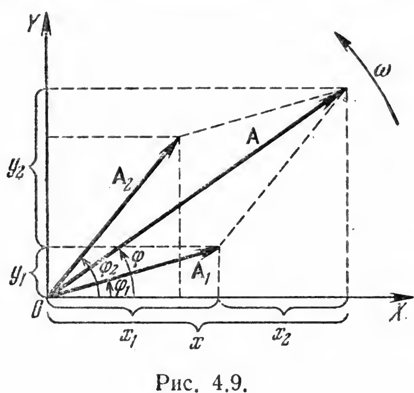


Рис. 4.9.

Отложим от центра O два вектора $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ соответственно под углами φ_1 и φ_2 к оси абсцисс. Проекции этих векторов на горизонтальную ось будут согласно (53.1) давать значения смещений x_1 и x_2.

При вращении обоих векторов против часовой стрелки с угловой скоростью ω проекции x_1 и x_2 их концов на ось OX будут совершать гармонические колебания по закону (53.1). Заметим теперь, что в силу равенства угловых скоростей ω обоих векторов угол между ними $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ со временем меняться не будет:

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \text{const}. \tag{53.3}$$

Построим на том же чертеже по правилу параллелограмма вектор $\mathbf{A}$, являющийся геометрической суммой обоих векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Как видно, проекция этого вектора x на горизонтальную ось равна алгебраической сумме проекций исходных векторов $x_1 + x_2 = x$. При вращении исходных векторов диагональ $\mathbf{A}$, как и весь параллелограмм, будет вращаться с той же угловой скоростью ω. Следовательно, величина x, как проекция вектора $\mathbf{A}$,

равномерно вращающегося с угловой скоростью ω, будет меняться со временем по закону

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{53.4}$$

т. е. будет представлять собой гармоническое колебание с тем же самым периодом $T = 2\pi/\omega$. Амплитуда A и начальная фаза φ_0 этого результирующего гармонического колебания находятся из простых тригонометрических соотношений

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y_{10} + y_{20}}{x_{10} + x_{20}} = \frac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}, \tag{53.5}$$

а по теореме косинусов, учитывая также (53.3), имеем:

$$A^2 = |\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}). \tag{53.6}$$

Итак, при сложении двух гармонических колебаний одинакового периода, направленных по одной и той же прямой, результирующее движение есть также гармоническое колебание с тем же периодом и с амплитудой A, лежащей в пределах

$$|A_2 - A_1| \leqslant A \leqslant A_2 + A_1. \tag{53.7}$$

Если фазы обоих колебаний одинаковы, $\varphi_2 = \varphi_1$, т. е. $\varphi_{20} = \varphi_{10}$, то амплитуды обоих колебаний просто складываются:

$$A = A_1 + A_2.$$

Если $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pi$, то говорят, что оба колебания находятся в противоположной фазе. При этом $\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \cos\pi = -1$ и $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_2 - A_1)^2$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна абсолютному значению разности амплитуд обоих исходных колебаний: $A = +\sqrt{(A_2 - A_1)^2} = |A_2 - A_1|$.

В частности, если складываются два колебания с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2$, но противоположными фазами, то $A = 0$, т. е. оба колебания взаимно уничтожаются.

Аналогично можно поступать при сложении многих колебаний одинаковой частоты (периода), но различных амплитуд и начальных фаз. Если

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10}),$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = A_n\cos(\omega t + \varphi_{n0}),$$

то суммарное движение

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

можно легко получить графически, как это показано на рис. 4.10; для этого нужно лишь измерить величины амплитуды A и угла φ_0. Этим способом сложения колебаний равной частоты широко пользуются в электротехнике.

Пример 2. Сложение колебаний с близкими периодами. Пусть точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях с близкими частотами вдоль одного направления. Для простоты мы рассмотрим случай равных нулю начальных фаз $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$ и равных по величине амплитуд:

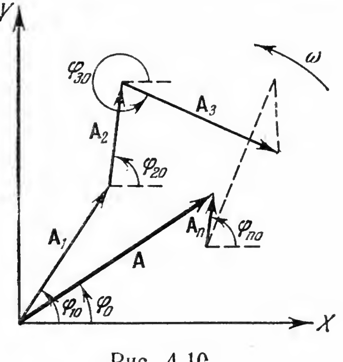


Рис. 4.10.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\cos\varphi_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 &= A\cos\varphi_2 = A\cos\omega_2 t, \end{aligned}\right\} \quad (53.8)$$

и

где $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1,\ \omega_2$. Тогда, пользуясь известными тригонометрическими тождествами, результирующее колебание можно привести к виду

$$x = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = \\ = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right). \quad (53.9)$$

Получившееся выражение есть произведение двух колебаний. Второй множитель, $\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$, имеет частоту, среднюю для двух слагаемых колебаний, т. е. близкую к их частотам. Первый же множитель, $\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$, обладает (в силу условия близости ω_1 и ω_2) малой частотой, т. е. большим периодом. Это позволяет рассматривать результирующее движение (53.9) как почти гармоническое колебание со средней угловой частотой $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ и медленно меняющейся амплитудой

$$2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right). \quad (53.10)$$

Подобное колебание изображено на рис. 4.11. Пунктирные линии представляют график медленно меняющейся по уравнению (53.10) амплитуды. Сплошной линией на том же чертеже представлен график результирующего колебания (53.9). В те моменты времени, когда фазы обоих исходных колебаний φ_1 и φ_2 близки друг другу, колебания складываются и амплитуда результирующего колебания приближается к $2A$. Так как частоты исходных колебаний несколько отличаются друг от друга, то, спустя некоторый промежуток времени, близкий к $\pi/(\omega_1 - \omega_2)$, одно из колебаний отстанет от другого по фазе примерно на π, фазы этих колебаний станут почти противоположными и амплитуда результирую-

щего колебания уменьшится почти до нуля. Такое постепенное возрастание и убывание амплитуды результирующего колебания носит название *биений*.

Если периоды и частоты обоих исходных колебаний соизмеримы, т. е. можно найти два таких целых числа n_1 и n_2, что

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}, \tag{53.11}$$

то через промежуток времени

$$\tau=(n_1-n_2)\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}=(n_1+n_2)\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2} \tag{53.12}$$

аргументы обоих сомножителей в (53.9) изменятся на целое (хотя и различное) число раз 2π, их произведение примет то же значение,

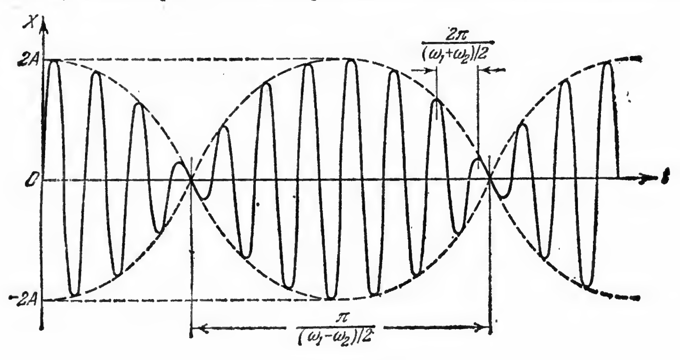


Рис. 4.11.

что и в начале этого промежутка. Величина τ тогда явится периодом результирующего колебания.

Если же частоты обоих колебаний несоизмеримы, то результирующее колебание будет *непериодическим*.

Явлением биений пользуются настройщики музыкальных инструментов, которые судят по исчезновению биений о точном совпадении частоты струны и эталонного источника звука (например, камертона).

Сложение близких по частоте колебаний используется также в радиоприемниках, носящих название *гетеродинов*. В ряде случаев производить усиление поступающих в приемник слабых сигналов высокой частоты неудобно. Это имеет место, например, в радиолокаторах, работающих на длине волны $\sim 0,1$ м (т. е. на частоте порядка $3\cdot 10^9$ Гц). Обычные радиолампы на такой частоте работать не могут. Кроме того, и в обычных приемниках сигнал проходит несколько каскадов усиления, и настраивать каждый из них на принимаемую частоту очень неудобно. Чтобы устранить

эту трудность, в приемник вводят генератор высокой частоты (и малой мощности) — гетеродин, частота которого, при необходимости, может меняться. Принимаемые приемником колебания складываются с колебаниями гетеродина, частота которого подбирается так, чтобы в результате получились биения более низкой частоты. При изменении частоты приходящих колебаний меняется и частота колебаний гетеродина так, чтобы частота биений оставалась одной и той же. В результате последующие каскады усиления работают на постоянной частоте, т. е. не требуют настройки. Таким образом, гетеродины позволяют принимать сигналы сверхвысокой частоты, на которые обычные радиолампы не рассчитаны, и чрезвычайно облегчают настройку радиоприемников обычного диапазона частот.

Пример 3. Сложение колебаний со сплошным спектром частот. В развитие предыдущего примера рассмотрим случай сложения очень большого числа колебаний с набором частот в некотором интервале $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ от $\omega = \omega_1$ до $\omega = \omega_2$. Для простоты будем считать начальные фазы всех этих колебаний равными нулю, а амплитуды одинаковыми и равными $A/\Delta\omega = a$ на единицу интервала частот. Иными словами, совокупность колебаний бесконечно близких частот от ω до $\omega + d\omega$ имеет суммарную амплитуду $a\,d\omega = \frac{A}{\Delta\omega}\,d\omega$. Сложение таких колебаний производится по правилам интегрального исчисления:

$$x(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} a\,d\omega \cos\omega t = \frac{a}{t}\{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t\} =$$

$$= \frac{2a}{t}\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t\right) = B(t)\cos\omega_0 t. \tag{53.13}$$

Этот результат, как и в предыдущем примере, можно трактовать как колебание со средней частотой $\omega_0 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ и переменной во времени амплитудой

$$B(t) = A\,\frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\,t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}\,t}. \tag{53.14}$$

Характер изменения этой амплитуды $|B(t)|$ со временем показан на рис. 4.12, *а* пунктиром. Благодаря множителю t в знаменателе эта амплитуда убывает со временем и выражение (53.13) фактически описывает импульс, практически существующий лишь в интервале Δt между моментами, когда числитель выражения (53.14) обращается в нуль, т. е.

$$\frac{\Delta\omega}{2}\,t = \pi, \quad \text{или} \quad \Delta\nu\,\Delta t = 1, \tag{53.15}$$

если перейти от круговых частот ω к обычным $\nu = \omega/2\pi$.

На рис. 4.12, *б* изображен случай, когда набор частот узкий, $\Delta\nu \ll \nu_0$ и $\Delta t \gg 1/\nu_0 = T_0$. В этом случае мы имеем почти чистое гармоническое колебание

с периодом T_0, но продолжающееся лишь ограниченное время Δt. Идеальное гармоническое колебание, продолжающееся сколь угодно длительно без изменения, т. е. с $\Delta t \to \infty$, соответствует бесконечно узкому набору частот $\Delta\nu \to 0$, т. е. одной определенной частоте ν_0.

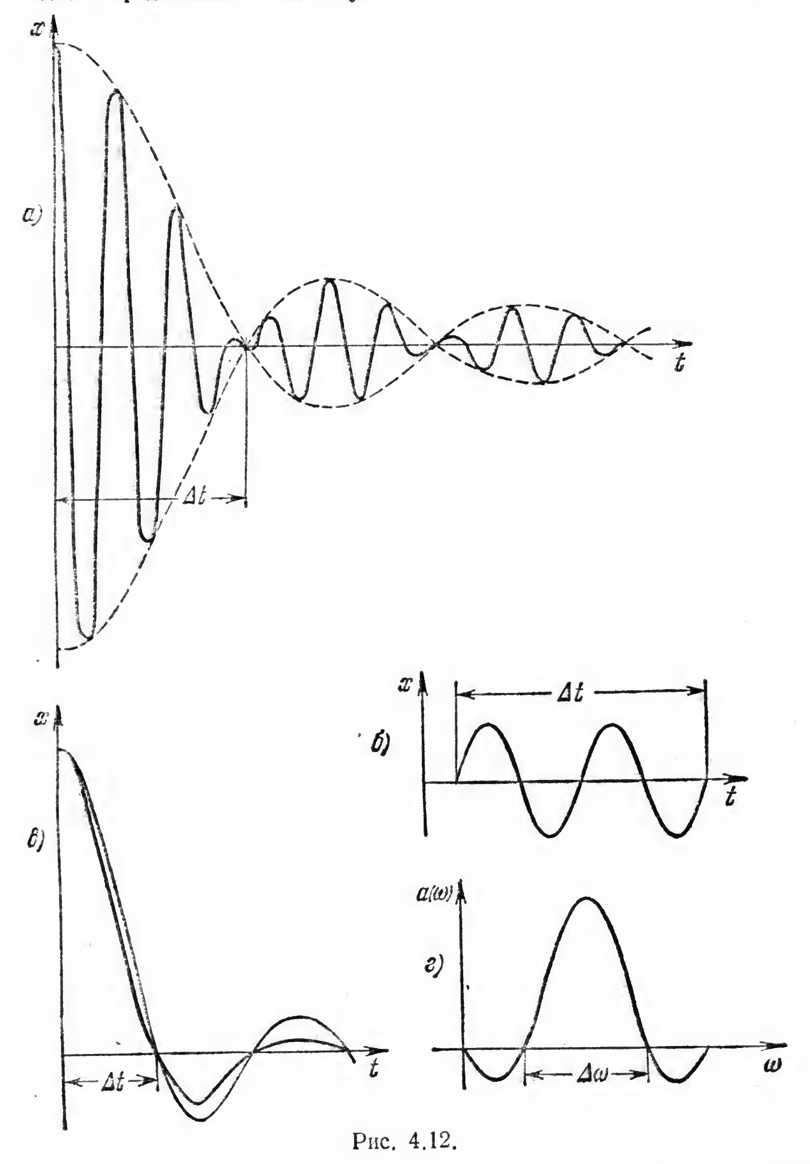


Рис. 4.12.

На рис. 4,12, *в* изображен противоположный случай очень широкого набора частот, $\Delta\nu \gg \nu_{мин}$. В этом случае внутри короткого интервала $\Delta t \ll T_0$ колеба-

ния складываются, а вне его практически уничтожают друг друга, и сумма таких гармонических колебаний дает одиночный всплеск $x(t)$ (жирная кривая). Тонкой линией показана функция $B(t)$.

Рассмотренный пример позволяет сделать два более общих и важных вывода. Во-первых, поскольку функция $\sin \omega t$ симметрична относительно обоих аргументов ω и t, то полученные в нашем примере соотношения между частотой и временем могут быть обращены. Так, на рис. 4.12, *б* изображено колебание, происходившее по закону синуса с определенным периодом $T_0 = 1/\nu_0 = 2\pi/\omega_0$, но в течение ограниченного промежутка времени Δt. Такое колебание нельзя считать чисто гармоническим, оно является наложением колебаний различных частот с амплитудой $a(\omega)$, зависящей от частоты по соотношению, аналогичному (53.14), с заменой t на ω, а $\Delta\omega$ на Δt. Вид этой функции $a(\omega)$ показан на рис. 4.12, *г* (отрицательные значения амплитуды соответствуют колебаниям с противоположной фазой). Основной набор частот $\Delta\omega$ около ω_0 удовлетворяет тому же «соотношению неопределенностей» (53.15), с которым нам придется встретиться в томе II в разделе о волновой механике частиц. Гармонические колебания, образующие спектр частот, изображенный на рис. 4.12, *г*, взаимно гасят друг друга вне интервала времени Δt, а внутри его имитируют гармоническое колебание определенной частоты ν_0. Чем у̀же интервал времени Δt существования колебания данного типа, тем шире неопределенность в частотах $\Delta\nu$, образующих этот тип колебания. Когда же $\Delta t \to \infty$, то неопределенность в частоте исчезает ($\Delta\nu \to 0$) и мы имеем бесконечно долго существующее чисто гармоническое колебание с вполне определенной частотой ν_0.

Второй вывод, который можно сделать, — это то, что колебательное движение с любым произвольным законом $|x(t)| < A$ может быть представлено как наложение гармонических колебаний всех возможных частот. В курсе высшей математики эта операция называется разложением произвольной функции в интеграл Фурье, и там же приводятся соотношения, позволяющие рассчитать амплитуды и фазы всех этих слагающих гармонических колебаний.

Пример 4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний имеет место при наложении лучей поляризованного света и в ряде других случаев. С помощью электронного луча в электронно-лучевой трубке (осциллографе), совершающего колебания в горизонтальном и вертикальном направлениях, удается изучать весьма быстрые колебательные процессы.

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi_{10}), \\ y &= B\cos(\omega t + \varphi_{20}). \end{aligned}\right\} \qquad (53.16)$$

Чтобы получить уравнение траектории, нужно из (53.16) исключить время t. Мы сделаем это не в общем случае, но для нескольких наиболее простых значений начальных фаз.

а) Положим $\varphi_{20} = \varphi_{10}$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{A}{B}, \\ \text{т. е.} \qquad y &= \frac{B}{A}x. \end{aligned}\right\} \qquad (53.17)$$

Траектория представляет прямую линию — диагональ прямоугольника со сторонами $2A$ (по оси X) и $2B$ (по оси Y), показанную на рис. 4.13, *а*.

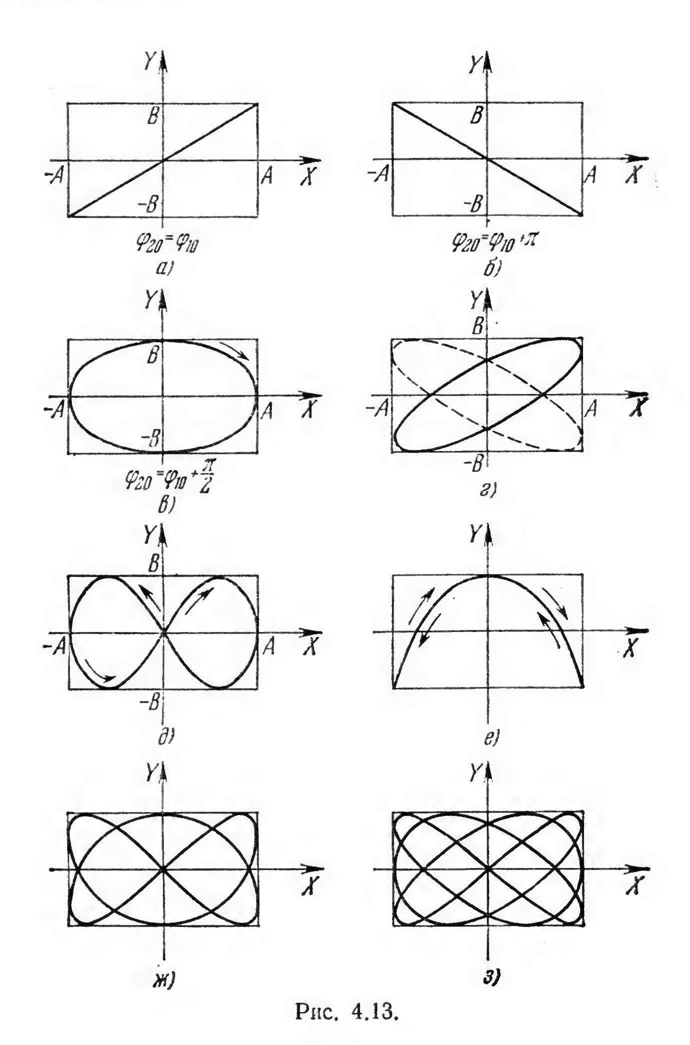


Рис. 4.13.

б) Пусть $\varphi_{20}=\varphi_{10}+\pi$. В этом случае косинусы будут отличаться знаком, и мы аналогично получим:

$$y=-\frac{B}{A}x, \qquad (53.18)$$

т. е. траектория будет другой диагональю прямоугольника (рис. 4.13, *б*).

в) Пусть $\varphi_{20}=\varphi_{10}+\frac{\pi}{2}$. Траекторию легко найти следующим приемом:

$$\frac{x}{A}=\cos(\omega t+\varphi_{10}),$$

$$\frac{y}{B}=\cos\left[(\omega t+\varphi_{10})+\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\omega t+\varphi_{10}).$$

Возводя в квадрат и складывая почленно, получим:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=\cos^2(\omega t+\varphi_{10})+\sin^2(\omega t+\varphi_{10}),$$

или

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1. \tag{53.19}$$

Таким образом, траекторией будет эллипс, показанный на рис. 4.13,*в*. При $A=B=a$ траектория превращается в окружность радиуса a. За период этот эллипс будет обходиться точкой M в направлении, показанном стрелкой.

г) Легко показать, что при $\varphi_{20}=\varphi_{10}-\pi/2$ траектория останется той же, но изменится направление обхода.

В случае произвольных значений φ_{10} и φ_{20}, точнее, их разности, траектория будет также эллипсом (подобным одному из показанных на рис. 4.13, *г*), вписанным в тот же прямоугольник. Это следует из того, что x и y меняются всегда в пределах

$$-A\leqslant x\leqslant A,\quad -B\leqslant y\leqslant B.$$

Прямые рис. 4.13, *а* и *б* следует рассматривать как вырожденный эллипс.

Таким образом, в случае равных частот суммарное колебание происходит в общем случае по эллипсу. Амплитуды складываемых колебаний равны половинам сторон прямоугольника, в который вписан эллипс, а сдвиг фаз определяет вид эллипса и направление его обхода.

Более сложные кривые получаются при неравных частотах. При этом, если отношение частот (периодов) не является рациональным числом, то кривая будет незамкнутой (не повторяющейся) и с течением времени заполнит собой весь прямоугольник.

В случае рационального отношения частот будут иметь место различные кривые, вид которых зависит от отношения частот и

сдвига начальных фаз. На рис. 4.13, *д*, *е*, *ж*, *з* показаны следующие случаи:

д)
$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin\omega t,\\ y &= B\sin 2\omega t; \end{aligned}\right\} \qquad (53.20)$$

е)
$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin\omega t,\\ y &= B\sin\left(2\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (53.21)$$

(движение происходит вперед и назад по той же траектории);

ж) одна из кривых при отношении частот 2 : 3;

з) одна из кривых при отношении частот 3 : 4.

Задавая, например, колебания электронного луча в электронно-лучевой трубке вдоль оси X с известной частотой и отклоняя его вдоль оси Y напряжением, частота которого неизвестна, можно с помощью получаемого изображения кривой (ф и г у р ы Л и с с а ж у) определить неизвестную частоту.

Рассмотренные выше примеры показывают, что различные сложные периодические движения могут быть представлены в виде суммы гармонических колебаний разных направлений, частот, амплитуд и начальных фаз.

Так, например, равномерное движение в плоскости X, Y по окружности радиуса a с угловой частотой ω может быть представлено в виде суммы двух гармонических колебаний по осям X и Y с одинаковыми амплитудами $A = B = a$ и частотами ω, сдвинутыми по фазе на $\pm\pi/2$. В зависимости от знака смещения фазы вращение будет происходить по или против часовой стрелки (рис. 4.13, *в* и *г*).

В дальнейшем мы используем тот факт, что в результате сложения двух вращательных движений можно получить гармоническое колебание. В качестве примера рассмотрим два вращательных движения по окружности радиуса a с частотой ω, происходящих в противоположных направлениях. Начальные фазы выберем так, чтобы фазы колебаний по оси X совпадали. Тогда вращательное движение, происходящее против часовой стрелки, описывается формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= a\cos\omega t,\\ y' &= a\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (53.22)$$

а по часовой стрелке —

$$\left.\begin{aligned} x'' &= a\cos\omega t,\\ y'' &= a\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (53.23)$$

Складывая эти движения, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+x'' = 2a\cos\omega t,\\ y &= y'+y'' = a\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+a\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (53.24)$$

На рис. 4.14 показаны положения точки, задаваемые для одного и того же момента времени налагающимися друг на друга вращательными движениями [рис. 4.14, *а* соответствует (53.22), а рис. 4.14, *б* — (53.23)]. Из чертежа видно, что смещения x' и x'' вдоль оси X складываются, в то время как смещения вдоль оси Y, будучи равными по величине, противоположны по направлению и в результате сложения взаимно погашаются. Таким образом, результирующее движение, показанное на рис. 4.14, *в*, происходит вдоль оси X, представляя собой, согласно (53.24), гармоническое колебание частоты ω и амплитуды $2a$.

Аналогично, подбирая начальные фазы вращательных движений, можно получить результирующее гармоническое колебание вдоль оси Y или вдоль прямых, составляющих любые углы с осью X.

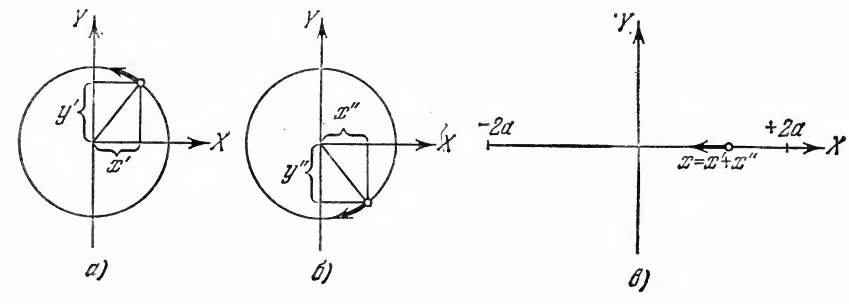


Рис. 4.14.

Можно также получить гармоническое колебательное движение вдоль любой прямой, складывая равномерное вращательное движение и одномерное колебательное движение. Так, например, при сложении вращательного движения, заданного формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= a\cos\omega t, \\ y' &= a\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{53.25}$$

и колебательного движения вдоль оси X по формуле

$$x''=a\cos(\omega t+\pi), \tag{53.26}$$

получаем результирующее движение в виде гармонического колебания вдоль оси Y:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+x''=a\cos\omega t+a\cos(\omega t+\pi)=0, \\ y &= y'=a\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{53.27}$$

При сложении вращения (53.25) с колебанием вдоль оси Y

$$y''=a\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \tag{53.28}$$

получаем результирующее движение в виде гармонических колебаний вдоль оси X

$$\left.\begin{aligned} x &= x'=a\cos\omega t, \\ y &= y'+y''=a\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+a\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=0. \end{aligned}\right\} \tag{53.29}$$

Рассмотренные примеры понадобятся нам при изучении оптики (том III).

§ 54. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс

В условиях, когда на тело действует только одна квазиупругая сила, оно будет совершать незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой $A = \text{const}$. На реально же движущиеся тела всегда будут воздействовать со стороны окружающей среды силы трения, препятствующие их движению. На преодоление сопротивления среды, на трение в опорах, на создание волн, на возникновение неупругих деформаций и т. п. будет затрачиваться энергия. Вследствие этого механическая энергия колеблющегося тела будет непрерывно уменьшаться, переходя в другие формы энергии и рассеиваясь в окружающую среду. Согласно (52.4) с уменьшением энергии колебания будет уменьшаться его амплитуда и колебание станет затухающим.

Полная сила F, действующая на колеблющуюся точку, будет тогда суммой квазиупругой силы $F_{\text{кв-упр}}$ и силы трения $F_{\text{тр}}$. При малых скоростях движения сопротивление обычно пропорционально первой степени скорости и направлено противоположно ей, т. е.

$$F_{\text{тр}} = -rv, \tag{54.1}$$

где r — коэффициент трения, зависящий от свойств среды, формы и размеров движущегося тела.

Чтобы решить задачу о колебательном движении при наличии трения, мы вернемся к уже разобранной задаче о гармоническом колебательном движении и найдем строгое математическое ее решение.

Заменяя во втором законе динамики ускорение w второй производной от смещения по времени, мы получим основное дифференциальное уравнение движения (одномерного!):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F. \tag{54.2}$$

При наличии одной только квазиупругой силы $F_{\text{кв-упр}} = -kx$ это уравнение примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{54.3}$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения материальной точки массы m под действием квазиупругой силы с коэффициентом «жесткости» k.

Неизвестная функция $x(t)$, характеризующая движение точки под действием квазиупругой силы, входит в уравнение (54.3) сама и под знаком второй производной. Для решения этого дифференциального уравнения вспомним, что функциями, которые при двукратном дифференцировании превращаются сами в себя с обратным знаком, являются синус и косинус (или показательная

функция с чисто мнимым показателем степени). Будем искать решение уравнения (54.3) в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (54.4)$$

с произвольными значениями постоянных A, φ_0 и ω. Введением начальной фазы φ_0 мы объединяем синус и косинус в одну функцию, поскольку они отличаются друг от друга только значением этой начальной фазы. Выполняя двукратное дифференцирование выражения (54.4) по t и подставляя найденные значения x и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в уравнение (54.3), получаем:

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -kA\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку обе части этого равенства можно сократить на $A\cos(\omega t + \varphi_0)$, то, следовательно, оно выполняется при произвольных значениях величин A и φ_0. Эти постоянные A и φ_0 могут быть любыми, *в зависимости от начальных условий движения,* а угловая частота ω равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (54.5)$$

в соответствии с тем, что было получено раньше.

Таким образом, мы математически доказали высказанное в § 51 утверждение, что если на материальную точку действует квазиупругая сила, то эта точка будет совершать гармоническое колебательное движение по закону (54.4) с угловой частотой, определяемой соотношением (54.5).

Разберем теперь аналогичным методом затухающие колебания при наличии сил трения. Подставляя в (54.2) полное выражение для силы $F = F_{\text{кв-упр}} + F_{\text{тр}} = -kx - rv = -kx - r\frac{dx}{dt}$, получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (54.6)$$

— дифференциальное уравнение движения материальной точки массы m под действием квазиупругой силы и силы трения.

Не касаясь общих методов решения дифференциальных уравнений, отметим, что в случае уравнения (54.6) искомая функция $x(t)$ должна обладать следующим свойством: как первая, так и вторая производная по времени от $x(t)$ должны отличаться от самой функции $x(t)$ лишь численными множителями. Такой функцией в самом общем случае является показательная функция с комплексным показателем степени или, что то же, произведение

показательной функции на синус или косинус. Поэтому будем искать решение дифференциального уравнения (54.6) в виде

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{54.7}$$

с произвольными значениями постоянных A_0, φ_0, ω и α. Вычисляя первую и вторую производные от выражения (54.7) и подставляя найденные значения x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в (54.6), получим, собирая члены суммы, содержащие общие множители:

$$A_0 e^{-\alpha t} \{[m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k] \cos(\omega t + \varphi_0) + \\ + [m2\alpha\omega - r\omega] \sin(\omega t + \varphi_0)\} = 0.$$

Множители $A_0 e^{-\alpha t}$ здесь можно сократить, так как A_0 — постоянная, а $e^{-\alpha t}$ ни при каком конечном значении t не обращается в нуль. Оставшееся выражение будет равно нулю при любых значениях t, если порознь будут равны нулю коэффициенты при $\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $\sin(\omega t + \varphi_0)$. Действительно, с изменением t в некоторый момент времени, например t', функция $\sin(\omega t' + \varphi_0)$ обратится в нуль. При этом $\cos(\omega t' + \varphi_0)$ будет равен ± 1. Следовательно, это равенство будет удовлетворяться, если коэффициент при $\cos(\omega t' + \varphi_0)$ равен нулю. Аналогично доказывается необходимость равенства нулю множителя при $\sin(\omega t + \varphi_0)$. Таким образом, получаем два уравнения для нахождения α и ω:

$$\left.\begin{aligned} m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k = 0, \\ m2\alpha\omega - r\omega = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\alpha = \frac{r}{2m} \tag{54.8}$$

и

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \tag{54.9}$$

Постоянные A_0 и φ_0, как и в предыдущем примере, могут быть любыми, в зависимости от начальных условий движения.

Выражение (54.7), в котором значения α и ω определены из (54.8) и (54.9), является общим решением уравнения затухающих колебаний (54.6). Оно отличается от чисто гармонического колебания (54.4) тем, что амплитуда колебания

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t} \tag{54.10}$$

является убывающей функцией времени. На рис. 4.15 представлен график зависимости x от t для затухающих колебаний, аналитически описываемых (54.7). Пунктиром на этом рисунке изображена зави-

симость (54.10) амплитуды от времени, а сплошной линией — полная зависимость (54.7). Чем больше коэффициент трения r, тем больше величина α в показателе степени и тем быстрее амплитуда затухающих колебаний убывает со временем. Напротив, при полном отсутствии трения, когда $r = 0$, то $\alpha = 0$, $e^{-\alpha t} = e^0 = 1$, $x = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, и мы придем к уже рассмотренному случаю чисто гармонических колебаний с угловой частотой

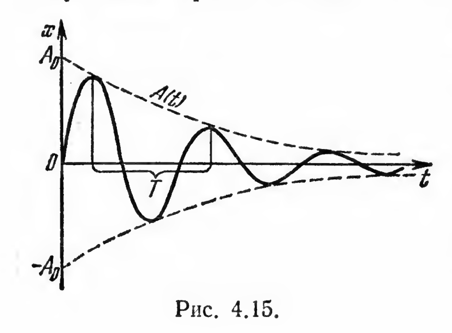


Рис. 4.15.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

При наличии трения не только убывает со временем амплитуда колебания, но и уменьшается угловая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad (54.11)$$

где ω_0 — угловая частота собственных колебаний точки при отсутствии трения.

Соответственно период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (54.12)$$

С увеличением трения период колебаний возрастает, и при $\alpha = \omega_0$ период становится бесконечным: $T = \infty$. При дальнейшем увеличении α период T становится мнимым, а движение точки — апериодическим, как это изображено на рис. 4.16.

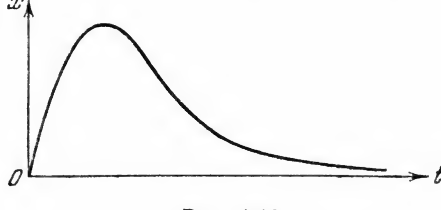


Рис. 4.16.

Сопоставим при $\alpha < \omega_0$ значения амплитуды в два соседние момента времени, отличающиеся друг от друга на один период, т. е. $A(t) = A_0 e^{-\alpha t}$ и $A(t + T) = A_0 e^{-\alpha(t+T)}$, и разделим первое из этих значений на второе. Тогда получим:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\alpha T} = \text{const}, \quad (54.13)$$

т. е. *амплитуда затухающих колебаний за каждый период убывает в одно и то же число раз.* Натуральный логарифм этого отношения

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \alpha T = d \quad (54.14)$$

носит название логарифмического декремента затухания.

Материальная точка, на которую действует квазиупругая сила, будучи выведена из положения равновесия $x = 0$, начнет совершать колебания около этого положения. Из-за наличия сил трения подобные собственные, или, как их иногда называют, свободные колебания точки всегда будут затухающими.

Для получения незатухающих колебаний необходимо воздействие дополнительной переменной внешней силы, которая подталкивала бы точку то в одну, то в другую сторону и работа которой непрерывно восполняла бы убыль энергии, затрачиваемой на преодоление трения. Подобная переменная сила называется вынуждающей ($F_{\text{вын}}$), а возникающие под ее действием незатухающие колебания — вынужденными.

Разберем простейший случай вынуждающей силы, меняющейся по закону синуса или косинуса, т. е. положим

$$F_{\text{вын}} = F_0 \cos(\Omega t). \tag{54.15}$$

Здесь F_0 есть амплитуда вынуждающей силы, т. е. максимальное возможное ее значение, а Ω — угловая частота колебаний вынуждающей силы. Полная сила, действующая на колеблющуюся точку, будет алгебраической суммой квазиупругой силы, силы трения и вынуждающей силы, и дифференциальное уравнение движения (54.2) примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\Omega t). \tag{54.16}$$

Как известно из курса высшей математики, решение этого уравнения,

$$x(t) = x_{\text{своб}}(t) + x_{\text{вын}}(t), \tag{54.17}$$

представляет собой сумму свободных колебаний $x_{\text{своб}}(t)$ и вынужденных колебаний $x_{\text{вын}}(t)$. Свободные колебания будут происходить с собственной угловой частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$ и в конце концов затухнут по закону (54.7). Что же касается вынужденных колебаний, то их частота должна, очевидно, совпадать с частотой вынуждающей силы. Амплитуда этих колебаний должна быть постоянной, поскольку амплитуда вынуждающей силы не меняется со временем.

Поэтому, пренебрегая собственными колебаниями системы, играющими существенную роль лишь в начале процесса, мы будем искать решение уравнения (54.16) в виде

$$x = x_{\text{вын}}(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \tag{54.18}$$

с неизвестными заранее амплитудой A и сдвигом фазы Φ.

Продифференцируем выражение (54.18) дважды по времени и подставим найденные значения x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в дифференциальное уравнение (54.16). Воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами для синуса и косинуса суммы, получим:

$$-m\Omega^2 A [\cos\Omega t \cos\Phi - \sin\Omega t \sin\Phi] =$$
$$= -kA [\cos\Omega t \cos\Phi - \sin\Omega t \sin\Phi] +$$
$$+ r\Omega A [\cos\Omega t \sin\Phi + \sin\Omega t \cos\Phi] + F_0 \cos\Omega t.$$

Приравнивая друг другу коэффициенты, стоящие в обеих частях равенства при синусе и соответственно при косинусе Ωt, получаем два уравнения, из которых находятся искомые величины:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2 + r^2\Omega^2}}, \quad (54.19)$$

$$\operatorname{tg}\Phi = -\frac{r\Omega}{k-m\Omega^2}. \quad (54.20)$$

Следует ясно представлять себе различие между решениями $x_{своб}(t)$ и $x_{вын}(t)$. Функция $x_{своб}(t)$ содержит две произвольные постоянные A_0 и φ_0, которые определяются из добавочных условий, например начальных условий движения. Функция же $x_{вын}(t)$ не содержит произвольных постоянных. Все входящие в нее величины определяются из самого дифференциального уравнения движения. Поэтому $x_{вын}(t)$ не зависит от начальных условий движения. Это значит, что когда в силу затухания $x_{своб}$ обратится в нуль, колебательное движение будет определяться только свойствами колеблющейся системы и амплитудой и частотой вынуждающей силы.

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы (54.15) возникают гармонические вынужденные колебания (54.18) с той же частотой Ω. Амплитуда вынужденных колебаний согласно (54.19) прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0, зависит от характеристик свободно колеблющейся точки m, k и r и, кроме того, является функцией угловой частоты колебаний вынуждающей силы Ω. Графики зависимости A и сдвига фаз Φ от Ω (для нескольких значений r) представлены на рис. 4.17, *а* и *б*.

Как видно из этих графиков, характер этих зависимостей существенно различен в трех областях изменения угловой частоты Ω.

1. Область малых частот:

$$\Omega \ll \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \quad (54.21)$$

В этой области сдвиг фаз Ф близок к нулю, а выражение для амплитуды, используя формулы (54.8) и (54.19), можно

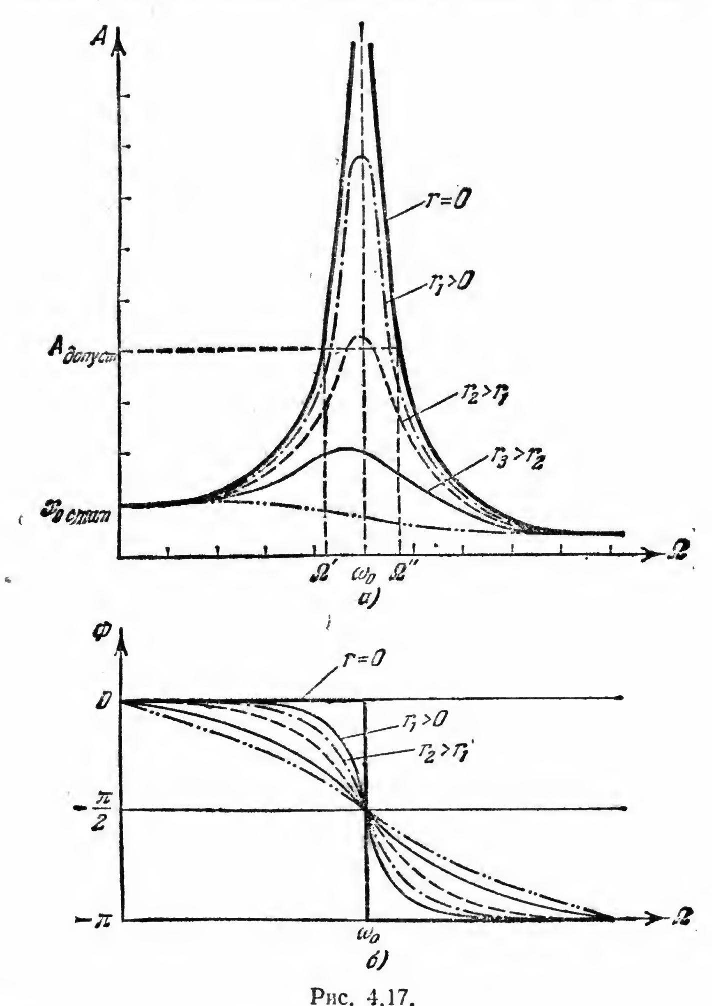


Рис. 4.17.

предварительно преобразовать к виду

$$A=\frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega_0^4}}}=\frac{x_{0\,стат}}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (54.22)$$

В предельном случае, когда $\Omega=0$ (при постоянной нагрузке), $A=F_0/k=x_{0\,стат}$, где $x_{0\,стат}$ — статическое смещение точки под

действием постоянной силы $F = F_0$. При $0 < \Omega \ll \omega_0$ и малом трении ($\alpha \ll \omega_0$) приближенно получаем:

$$x \approx \frac{F_0}{k} \cos \Omega t = \frac{F}{k}, \qquad (54.23)$$

т. е. смещение колеблющейся точки почти без искажений следует за изменением вынуждающей силы. Этот случай представляет практический интерес для измерительной техники. Различные самопишущие приборы для регистрации быстропеременных усилий (например, мембранный индикатор, записывающий давление в быстроходном двигателе) представляют собой системы, на которые действуют упругие или квазиупругие силы, возвращающие систему в положение равновесия после снятия нагрузки. Переменное усилие является для такой системы вынуждающей силой со своей характерной угловой частотой Ω (или несколькими угловыми частотами Ω_i). Чтобы вынужденные колебания прибора успевали следовать за изменениями вынуждающей силы, должно выполняться неравенство (54.21), т. е. собственная частота колебаний прибора ω_0 должна быть во много раз больше частоты изменения измеряемой величины Ω. При $\omega_0 > 10\Omega$ ошибка измерений не будет превышать 1—2%. Увеличение собственной частоты ω_0 достигается как за счет увеличения жесткости измерительной системы k, так и за счет уменьшения ее массы m [из (54.20) следует, что с ростом k и уменьшением m величина $\operatorname{tg} \Phi \to 0$, а следовательно, и сдвиг фаз $\Phi \to 0$].

2. Область высоких частот:

$$\Omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \qquad (54.24)$$

При таких частотах $\Phi \approx -\pi$ и колебания точки происходят в фазе, противоположной колебаниям вынуждающей силы. Когда смещение положительно, вынуждающая сила отрицательна, и наоборот. Вследствие этого амплитуда вынужденных колебаний не может быть большой и убывает с ростом частоты вынуждающей силы по закону

$$A \approx x_{0\,\text{стат}} \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2. \qquad (54.25)$$

Подобный случай также имеет важное практическое значение. Например, для предотвращения воздействия качки корабля на различные приборы их следует подвешивать на сравнительно мягких пружинах и максимально утяжелять. Если при этом частота собственных колебаний системы ω_0 будет сделана много меньше частоты качки Ω, то согласно (54.25) амплитуда колебаний подвешенного прибора будет много меньше амплитуды колебания точки подвеса.

3. Область резонанса:

$$\Omega \approx \omega_0. \qquad (54.26)$$

При частотах колебания вынуждающей силы, близких к частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний сильно возрастает и начинает во много раз превышать статическое смещение:

$$A_{\text{резон}} \approx x_{0\,\text{стат}} \frac{\omega_0}{2\alpha}. \tag{54.27}$$

Чем меньше коэффициент трения, тем больше эта амплитуда. В пределе, $A_{\text{резон}} \to \infty$ при $r \to 0$. Это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при $\Omega \approx \omega_0$ носит название **механического резонанса**.

Явления резонанса, как вредные, так и полезные, широко распространены в природе и технике. Когда войсковая часть идет по мосту, то обязательно подается команда идти «не в ногу». Периодические толчки, создаваемые строем солдат при ходьбе «в ногу», могут попасть в резонанс с собственными колебаниями моста и привести к его разрушению. Маломощный двигатель, если он плохо уравновешен и при вращении «бьет», может в случае резонанса разрушить или сильно повредить сооружение, на котором он укреплен, и т. п.

При запуске в ход машины вибрация ее деталей будет зависеть от частоты вращения машины. Обозначим через $A_{\text{допуст}}$ максимальную амплитуду, которая допустима при вибрации данной детали без опасности ее поломки.

Из рис. 4.17, *а* видно, что при пренебрежимо малом трении ($r \approx 0$) в некоторой области частот Ω, заключенной в пределах

$$\Omega' < \Omega < \Omega'',$$

амплитуда колебаний детали становится очень большой и превышает $A_{\text{допуст}}$, что грозит аварией машины.

Чем больше трение, тем уже опасная полоса частот, и при достаточно большом трении $r > r_2$ вся область частот безопасна для работы машины.

Однако добиваться снижения амплитуды вынужденных колебаний машины, увеличивая трение, было бы нелепо. Это не означает, с другой стороны, что машина должна работать всегда в области малых частот

$$\Omega < \Omega'.$$

Следует твердо помнить, что движение

$$x = x_{\text{вын}}(t)$$

устанавливается лишь спустя достаточно большой промежуток времени (по сравнению с периодом колебания T) после изменения характера движения, когда $x_{\text{своб}}$ вследствие наличия трения затухает. Затухание же тем меньше, чем меньше трение. Следовательно,

и при изменении режима работы машины амплитуда вынужденных колебаний устанавливается не сразу. Это означает, что опасная зона частот от Ω' до Ω'' может быть пройдена, если ускорение хода машины (или замедление) не слишком мало. Не следует лишь задерживаться в этой опасной для машины области частот.

С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если частота их совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Вся прикладная акустика и радиотехника, аппараты, воспринимающие звуковые и электрические колебания, основаны на явлениях резонанса.

Возможность поддерживать незатухающие колебания представляет чрезвычайный интерес для техники. Особенно важными и широко применяемыми являются колебательные движения, возникающие и поддерживающиеся за счет постоянного, неколебательного источника энергии. Такие системы называются **автоколебательными**. Теория автоколебаний разрабатывалась главным образом советскими учеными (Мандельштам, Папалекси, Андронов, Хайкин, Теодорчик, Харкевич и др.). В качестве примеров автоколебательных систем можно привести: часы, в которых постоянные колебания маятника поддерживаются за счет энергии спиральной пружины или поднятого груза; радиопередатчик, энергия колебаний которого поддерживается за счет энергии аккумуляторных батарей; электрический звонок, пневматический молоток и многие другие приборы.

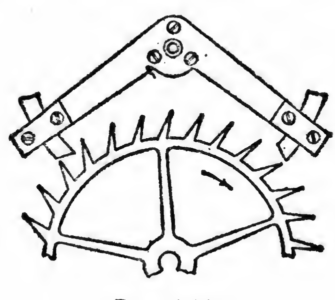


Рис. 4.18.

Чтобы колебательное движение не затухало, к колеблющейся системе необходимо подводить энергию для компенсации ее потерь в процессе колебаний. Подвод энергии осуществляется в виде «толчков» в подходящие моменты времени. Толчок должен ускорить, а не замедлить колебание. В автоколебательной системе включение источника энергии для получения нужного толчка производится самой системой, что гарантирует получение толчков в нужные моменты времени.

Рассмотрим, например, работу простейших стенных часов, в которых энергия груза тратится на поддержание колебаний маятника, расходующего свою энергию на трение.

Существуют различные конструкции (так называемые «ходы»), связывающие механизм часов и маятник. В наиболее распространенном «анкерном ходе» механизм часов и маятник связаны с помощью системы зубчатых колес. Над одним из зубчатых колес (рис. 4.18) находится рычаг — «якорь», к которому прикреплены два зуба

специальной формы — «палетты». Якорь укреплен на оси маятника и качается вместе с ним.

При качании маятника палетты по очереди то опускаются, заходя между зубьями шестерни, то поднимаются. При подъеме очередной палетты, когда срез ее соскальзывает с конца зуба шестерни, шестерня под действием пружины поворачивается, и кончик зуба, скользя по нижней, косо срезанной поверхности палетты, подталкивает ее, а вместе с ней — якорь и маятник. В это время противоположная палетта опускается между зубьями, позволяя повернуться шестерне лишь на один зуб. Таким образом, маятник получает непрерывные толчки, поддерживающие его незатухающие колебания. В свою очередь скорость вращения зубчатого колеса, а вместе с ним и всего механизма часов определяется периодом колебания маятника.

Советским ученым принадлежит открытие нового типа резонанса, получившего название параметрического резонанса.

Представим себе, что одна из физических величин («параметров»), определяющая свойства колебательной системы, сама периодически меняется. Таким параметром в случаях маятника или качелей может быть расстояние от оси колебаний до центра инерции системы.

При наличии малых колебаний системы периодическое изменение такого параметра может, при соответствующей частоте, привести к значительному усилению колебаний — это и есть параметрический резонанс.

Если качели совершают малые колебания, то эти колебания можно усилить, поднимаясь и приседая в «такт», т. е. меняя положение центра инерции системы относительно оси колебаний.

ГЛАВА XIV

ВОЛНЫ

§ 55. Распространение колебаний. Уравнение луча

Колеблющееся материальное тело, помещенное в упругую среду, будет увлекать за собой и приводить в колебательное движение прилегающие к нему частицы среды. Последние в свою очередь будут воздействовать на соседние частицы и приводить их также в колебательное движение и т. д. При этом существенно, что увлекаемые частицы среды будут несколько отставать по фазе от ранее приходящих в движение частиц, так как передача колебаний от точки к точке всегда осуществляется с конечной скоростью, характерной для данной среды. Таким образом, колеблющееся материальное тело, помещенное в упругую среду, явится источником колебаний, распространяющихся от него в среде во все стороны. Этот процесс распространения колебаний в упругой среде называется в о л н о й.

Камень, брошенный в воду, вызывает распространение от места падения однократной непериодической поверхностной волны. Тело, гармонически колеблющееся на поверхности воды, вызывает распространяющиеся периодические поверхностные волны.

Волна, проходящая через данную точку среды, характеризуется определенным направлением распространения. Область пространства, внутри которой колеблются все частицы среды, называется в о л н о в ы м п о л е м. Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, еще не начавших колебаться, носит название ф р о н т а в о л н ы. *В однородной изотропной среде направление распространения перпендикулярно к фронту волны.*

Частица среды, до которой дошел фронт волны, приходит в колебательное движение, амплитуда, частота и направление которого в пространстве зависят от амплитуды, частоты и направления колебаний предшествующих частиц. Направление движения колеблющихся точек может не совпадать с направлением распространения волны. На рис. 4.19 изображена длинная проволочная спираль, витки которой упруго связаны друг с другом. Возбудим колебания

крайнего витка в точке O. Волна начнет распространяться вдоль спирали по направлению OM. На рис. 4.19, *а* изображен случай, когда мы заставляем крайний виток колебаться в направлении, перпендикулярном к OM. В этом случае и для всех последующих витков направление колебаний будет перпендикулярным к направлению их распространения. Подобные волны называются поперечными. На рис. 4.19, *б* изображен иной случай, когда направление колебаний параллельно направлению распространения. Подобные волны называются продольными.

Поперечные волны следует еще характеризовать ориентацией в пространстве плоскости, проходящей через направление колебаний

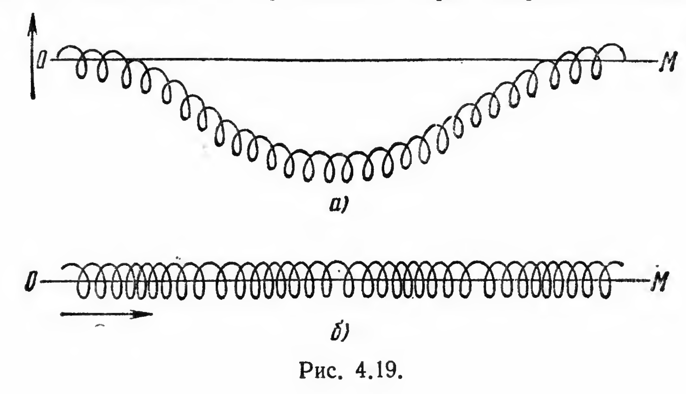


Рис. 4.19.

и направление распространения. Эта плоскость носит название плоскости колебаний или плоскости поляризации, а сама волна называется линейно поляризованной. В анизотропной среде эта ориентация может изменяться от точки к точке. В случае рис. 4.19, *а* плоскость поляризации совпадает с плоскостью чертежа.

Скорость движения каждой колеблющейся точки непрерывно меняется по величине и зависит, как мы установили выше [формула (50.7)], от амплитуды, частоты и фазы колебаний. В противоположность этому скорость перемещения фронта данной волны в однородной среде постоянна. Она зависит только от свойств среды и характера колебания. Для выяснения основных характеристик распространяющейся волны выведем уравнение, называемое уравнением луча. Рассмотрим простейший случай гармонического колебания, распространяющегося вдоль прямой — оси X (рис. 4.20). Обозначим смещение колеблющейся точки из положения равновесия через y. Для продольных волн смещение y параллельно X, а для поперечных — перпендикулярно к X.

Для наглядности будем считать, что на рис. 4.20 изображен случай поперечной волны, распространяющейся от точки O — начала

координат, так что показанные смещения отвечают реальным отклонениям колеблющихся точек от оси X. Будем считать, что источник колебаний, помещенный в точке O, в момент времени $t = 0$ начал совершать гармоническое колебательное движение вдоль оси Y по закону

$$y_0(t) = A\sin 2\pi\nu t = A\sin\omega t. \qquad (55.1)$$

Это колебание источника вызовет гармоническое колебательное движение упруго связанных с ним соседних точек с теми же амплитудой A и угловой частотой ω. Однако последующие точки начнут колебаться с некоторым запозданием, тем бо́льшим, чем дальше они находятся от источника. Для точки M, находящейся на расстоянии x от источника, начало колебаний отстает от начала колебаний точки O на промежуток времени $\tau = x/v$, где v — скорость распространения волны в рассматриваемой упругой среде.

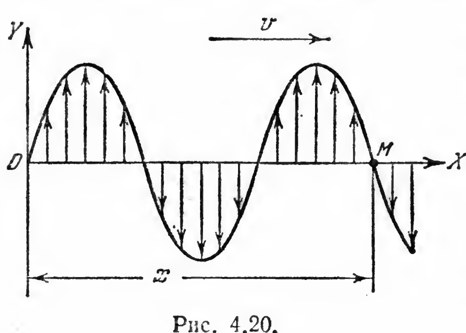


Рис. 4.20.

Таким образом, смещение точки M, которое мы обозначим y_M, в момент времени t будет равно смещению y_O точки O в момент времени t', равный

$$t' = t - \tau = t - \frac{x}{v}. \qquad (55.2)$$

По амплитуде это смещение будет равно исходному в случае отсутствия затухания, что мы и будем предполагать (для простоты) в дальнейшем. Следовательно,

$$y_M(t) = y_O(t') = A\sin\omega t'. \qquad (55.3)$$

Подставляя сюда значение t' из (55.2), находим, что отклонение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии x от источника волны, в момент времени t равно

$$y_M(t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\right). \qquad (55.4)$$

При движении волны справа налево знак скорости меняется:

$$y_M(t) = A\sin 2\pi\nu\left(t + \frac{x}{v}\right). \qquad (55.4а)$$

Из (55.4) следует, что смещение y произвольной точки M в бегущей волне зависит от двух переменных: времени наблюдения t и расстояния до источника x. Если заменить в (55.4) угловую ча-

стоту ω периодом колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$, то искомое уравнение луча примет вид

$$y = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{vT}\right). \qquad (55.5)$$

Из (55.4) или (55.5) следует, что все точки волны колеблются с одинаковой амплитудой A, одним и тем же периодом T, но с различными начальными фазами. Так, фаза точки M отличается от фазы точки, находящейся в начале координат, на $\frac{2\pi x}{vT}$.

Рассмотрим теперь положения различных точек волны в один и тот же момент времени для всей волны. Для этого в формуле (55.4) или (55.5) фиксируем значение t и рассмотрим y как функцию x. Но согласно (55.4), (55.5) y есть периодическая функция x. График y как функции x при постоянном t (рис. 4.20) можно рассматривать как мгновенную фотографию бегущей поперечной волны (в случае продольной волны смещения y лежат вдоль оси X). Для момента времени $t + \Delta t$ картина будет той же, но только сдвинется вправо на величину $\Delta x = v\,\Delta t$. На рис. 4.21 приведены два последовательных «снимка» волны, сделанные в моменты времени t и $t + \Delta t$.

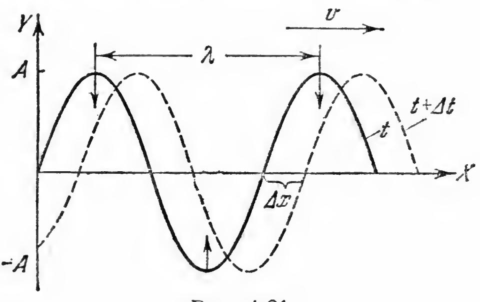


Рис. 4.21.

Точки, в которых смещение y достигает своего максимального значения $y_{\text{макс}} = +A$, называются гребнями волны, а точки, в которых y принимает минимальное значение $y_{\text{мин}} = -A$, — впадинами. Расстояние λ между двумя соседними гребнями или впадинами носит название **длины волны**. Величина λ есть также расстояние между двумя любыми точками волны, фазы колебаний которых отличаются друг от друга на 2π, поскольку при изменении аргумента на 2π синус и косинус принимают первоначальные значения.

Согласно (55.4) тогда имеем:

$$\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) - \left(\omega t - \frac{\omega(x+\lambda)}{v}\right) = 2\pi,$$

что дает после сокращений:

$$\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi \quad \text{или} \quad \frac{\nu\lambda}{v} = 1,$$

т. е.

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT. \qquad (55.6)$$

Как видно из рис. 4.21, спустя промежуток времени Δt вся волна переместится на некоторое расстояние Δx вправо, в то время как сами колеблющиеся точки останутся на тех же расстояниях x от источника. Отношение $\Delta x/\Delta t$ представляет собой скорость распространения волны v, которая согласно (55.6) равна

$$v=\frac{\lambda}{T}=\nu\lambda. \tag{55.7}$$

Скорость волны равна ее частоте (т. е. числу волн, испускаемых источником в секунду), умноженной на длину волны. За время T волна перемещается на расстояние λ.

Подставляя выражение (55.7) для скорости волны в (55.5), мы можем привести уравнение луча к симметричному виду:

$$y=A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=A\sin(\omega t-kx), \tag{55.8}$$

где $k=2\pi/\lambda$ называется волновым вектором.

Введенное нами понятие длины волны и полученное уравнение луча остаются в силе и для продольных колебаний. В этом случае под x следует понимать расстояние от источника до положения равновесия колеблющейся точки M, а под y — смещение этой же точки от положения равновесия. Поскольку для продольных волн y параллельно x, то для этого случая расположение координатных осей на графиках рис. 4.20 и 4.21 следует считать чисто условным и не соответствующим их реальному расположению в пространстве.

§ 56. Скорость распространения волн в упругой среде

Как видно из уравнения луча (55.5), при распространении волны в упругом теле смещения соседних колеблющихся точек этого тела в один и тот же момент времени будут различными. Колеблющееся тело непрерывно изменяет свою форму — деформируется. В продольных волнах имеет место деформация попеременного растяжения и сжатия. При поперечных волнах в среде распространяется периодически колеблющаяся деформация сдвига.

Если деформировать (сжать, растянуть или сдвинуть друг относительно друга) крайние точки упругого тела, то эта деформация будет распространяться в теле с некоторой скоростью v. Для теоретического вычисления величины v рассмотрим сначала схематически простейший случай передачи деформации через упругий стержень. Пусть в течение короткого промежутка времени Δt ударом молотка мы сообщили этому стержню некоторый импульс (рис. 4.22). За это время точки торца стержня сместятся на некоторое расстояние Δl. Возникшая деформация будет перемещаться от точки к точке, и по стержню побежит волна сжатия. К концу промежутка Δt сжатие охватит участок стержня длиной l. Отношение

$l/\Delta t = v$ представляет собой скорость распространения волны сжатия по стержню.

К концу промежутка Δt все частицы участка стержня длины l будут двигаться со скоростью $u = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ вправо. Поскольку в начале этого промежутка частицы были неподвижны, то приращение количества движения стержня будет равно $mu - 0$, где m — масса участка l. Обозначив площадь поперечного сечения стержня через S, а плотность материала стержня через ρ, мы получим $m = \rho Sl$. По законам динамики приращение количества движения равно импульсу внешней силы F, действовавшей при ударе на стержень, т. е.

$$F\Delta t = \rho Slu. \qquad (56.1)$$

С другой стороны, сила, сжимавшая стержень, связана с деформацией Δl сжатого участка l по закону Гука соотношением

$$F = ES\frac{\Delta l}{l}, \qquad (56.2)$$

Рис. 4.22.

где E — модуль упругости. Исключая из уравнений (56.1) и (56.2) силу F, мы получим:

$$ES\frac{\Delta l}{l}\Delta t = \rho Sl\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

и, после сокращений,

$$\frac{E}{\rho} = \left(\frac{l}{\Delta t}\right)^2 = v^2.$$

Отсюда скорость распространения волны сжатия в упругом стержне равна

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (56.3)$$

Для стали $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см$^2 \approx 1{,}96 \cdot 10^{11}$ Н/м$^2 = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ Па, плотность $\rho = 7/8$ г/см$^3 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $v = \sqrt{1{,}96/7{,}8} \cdot 10^4$ м/с $\approx$ $\approx 5 \cdot 10^3$ м/с $= 5$ км/с.

Если первоначально стержень растягивать, а не сжимать, то величины F, Δl и u изменят свой знак на обратный, а величина v останется той же самой. Таким образом, выражение (56.3) дает скорость распространения волн растяжения и сжатия в упругом стержне. Очевидно, с такой же скоростью по стержню будут распространяться и более сложные импульсы попеременного растяжения и сжатия. Величина v есть скорость распространения любых продольных волн в стержне, в частности синусоидальных волн.

В случае поперечных волн приведенная схема расчета и уравнение (56.1) остаются в силе, с той разницей, что величины F, Δl и u будут перпендикулярны к направлению распространения (оси стержня), как это изображено на рис. 4.23. Кроме того, в этом случае мы имеем другой вид деформации стержня — деформацию сдвига. Поэтому уравнение (56.2) следует заменить аналогичным уравнением

$$F = GS\frac{\Delta l}{l}, \tag{56.4}$$

где G — так называемый м о д у л ь с д в и г а. Скорость распространения поперечных волн $v_{попер}$ тогда получится равной

$$v_{попер} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{56.5}$$

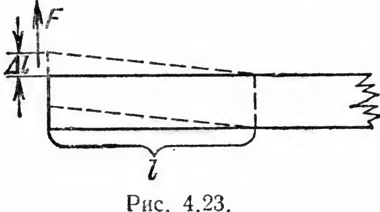


Рис. 4.23.

В упругих твердых телах деформации растяжения и сжатия сопровождаются небольшим изменением поперечных размеров тел. У тонких стержней эти изменения поперечных размеров происходят беспрепятственно и скорость распространения продольных волн $v_{прод}$ определяется уравнением (56.3). В телах больших поперечных размеров поперечные деформации затруднены и скорость распространения продольных волн равна

$$v_{прод} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}, \tag{56.6}$$

где E' — м о д у л ь с ж а т и я слоя, близкий по величине к модулю E.

Изучая скорость распространения продольных и поперечных волн, можно сделать заключения о природе веществ, через которые проходят упругие волны. На этом основаны с е й с м и ч е с к и е методы геологической разведки. При сильном взрыве от места взрыва через землю бегут волны деформации, скорость которых согласно (56.6) и (56.5) зависит от механических свойств пород. Поэтому, измеряя скорость распространения волн на различных расстояниях от точки взрыва, можно оценить характер залеганий.

Такие же волны деформации бегут по земной коре и от места землетрясения. Поскольку модуль сдвига G в твердых телах примерно в два раза меньше модуля упругости E, то продольные волны от места, где произошло землетрясение, бегут в 1,4 раза быстрее поперечных. Поэтому приборы, расположенные на сейсмической станции, регистрируют толчок от происшедшего на расстоянии L от станции землетрясения дважды, через промежуток времени

$$t = \frac{L}{v_{попер}} - \frac{L}{v_{прод}}. \tag{56.7}$$

Измеряя этот промежуток времени между приходом продольных и поперечных волн, можно оценить расстояние L от сейсмической станции до очага землетрясения или места подземного атомного взрыва.

В жидкости и газе деформации сдвига неупруги. Если сдвинуть один слой относительно другого, то в этих случаях, в противоположность твердым телам, сдвинутые слои не стремятся вернуться в исходное состояние. Поэтому *в жидкостях и газах могут распространяться только продольные волны* — волны расширения и сжатия. Скорость этих волн в жидкости равна

$$v_{ж}=\sqrt{\frac{K}{\rho}}, \tag{56.8}$$

где K — объемный модуль упругости и ρ — плотность жидкости.

Скорость распространения продольных волн в газах вычисляется аналогичным образом. В продольной волне при одностороннем растяжении относительное удлинение $\Delta l/l$ равно относительному увеличению объема $\Delta V/V$. Это изменение объема вызывается уменьшением давления $-\Delta p$ в данном месте, которое играет в этом случае роль напряжения F/S в твердом теле. Модуль в газе будет равен отношению $-\Delta p$ к $\Delta V/V$ и скорость распространения продольных волн будет равна

$$v_{г}=\sqrt{-\frac{\Delta p}{\Delta V}\,V^2}=\sqrt{-V^2\frac{dp}{dV}}, \tag{56.9}$$

поскольку плотность газа ρ обратна его удельному объему V (через V обозначен *удельный объем газа*).

Если колебания плотности газа в продольных волнах происходят очень медленно (с малой частотой), то температура соседних участков, попеременно растянутых и сжатых, быстро выравнивается и деформации растяжения и сжатия происходят изотермически. Тогда по уравнению Менделеева — Клапейрона для одного моля газа

$$p=\frac{RT}{\mu V},$$

где R — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярный вес и T — абсолютная температура газа.

Отсюда

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{изотерм}=-\frac{RT}{\mu V^2}=-\frac{p}{V}. \tag{56.10}$$

Для быстрых колебаний сравнительно высокой частоты сжатие и разрежение происходят адиабатически. По уравнению адиабаты

$$pV^{\gamma}=\text{const},$$

где $\gamma = C_p/C_V$ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_V:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{адиабат}} = -\gamma \frac{p}{V}. \qquad (56.11)$$

Соответственно этому изотермические волны в газах будут распространяться со скоростью

$$v_{\text{изотерм}} = \sqrt{\frac{p}{V}V^2} = \sqrt{pV} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \qquad (56.12)$$

а скорость распространения адиабатических волн равна

$$v_{\text{адиабат}} = \sqrt{\gamma p V} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \qquad (56.13)$$

§ 57. Эффект Допплера

Источник колебаний возбуждает волны в окружающей среде, которые распространяются в ней со скоростью, зависящей только от свойств этой среды (как было показано в § 56), но не зависящей от скорости движения источника по отношению к среде. Однако частота (длина волны) наблюдаемых волн зависит и от скорости источника волн, и от скорости наблюдателя по отношению к среде.

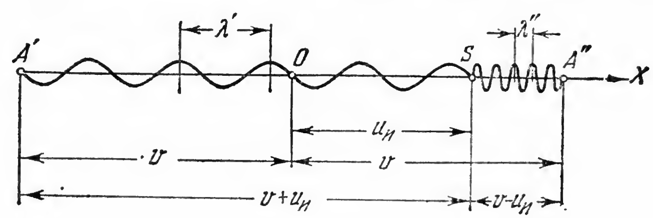


Рис. 4.24.

Рассмотрим простейшие случаи, когда источник волн и наблюдатель движутся относительно среды вдоль одной прямой. Координатные оси будем считать неподвижными относительно среды; скорость распространения волн в среде примем равной v. Скорости источника волн и наблюдателя, движущихся вдоль оси X, обозначим через $u_и$ и $u_н$ соответственно.

Пусть наблюдатель неподвижен, а источник волн S движется вдоль оси X вправо со скоростью $u_и < v$. Примем, что частота колебаний источника равна ν_0. Выберем в качестве начала координат точку, в которой источник начал испускать волны в момент времени $t = 0$ (рис. 4.24). Колебания, возникшие в точке $x = 0$ в момент $t = 0$, будут распространяться вправо и влево, и через се-

кунду фронт волны будет находиться от точки O на расстоянии v (справа и слева, как это показано на рис. 4.24), дойдя до точек A' и A''. Источник S испустит за секунду ν_0 волн, которые справа расположатся в интервале SA'', а слева — SA'. Длину волны справа λ'' и слева λ' легко получить, разделив длины интервалов на число разместившихся в них волн:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'' &= \frac{v - u_и}{\nu_0} = \lambda_0 - \frac{u_и}{\nu_0}, \\ \lambda' &= \frac{v + u_и}{\nu_0} = \lambda_0 + \frac{u_и}{\nu_0}, \end{aligned}\right\} \tag{57.1}$$

где $\lambda_0 = v/\nu_0$ — длина волны, распространяющейся в среде в случае неподвижного по отношению к ней источника колебаний частоты ν_0.

Таким образом, длина волны, распространяющейся в направлении движения источника, уменьшается, в противоположном — возрастает.

Физически этот результат совершенно очевиден. Волна, испускаемая источником в направлении движения, нагоняется самим источником. Испустив гребень волны, источник испустит следующий не на расстоянии λ_0 от него, а пройдя за это время вслед за ним путь $u_и T = u_и/\nu_0$, т. е. расстояние между гребнями будет $\lambda_0 - \frac{u_и}{\nu_0}$. От волн, испускаемых в обратном направлении, источник уходит, «растягивая» тем самым длину волны.

Наблюдатели в точках A' и A'' определят соответственно частоты волн:

1) в точке A'

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu_0 \frac{v}{v + u_и} \quad (\nu' < \nu_0);$$

2) в точке A'' (57.2)

$$\nu'' = \frac{v}{\lambda''} = \nu_0 \frac{v}{v - u_и} \quad (\nu'' > \nu_0).$$

Так, если мимо неподвижного наблюдателя проносится поезд, сигнализирующий сиреной с некоторой частотой ν_0, то, пока он приближается, наблюдатель будет воспринимать повышенную частоту $\nu'' > \nu_0$. Когда же поезд пройдет мимо и начнет удаляться, то наблюдатель будет воспринимать тот же сигнал с пониженной частотой $\nu' < \nu_0$.

На рис. 4.25 показаны волны на поверхности, расходящиеся от источника, движущегося вдоль оси X со скоростью $u_и < v$. Полученные выше формулы верны для наблюдателей, неподвижных относительно среды и расположенных на оси X, вдоль которой движется источник волн. Изменение частоты в других направлениях (мгновенное, так как для всех остальных точек, кроме расположенных на оси X, оно меняется со временем) мы вычислять не будем. Читатель при

желании с помощью рис. 4.25 сможет вычислить λ''' для любого мгновенного направления SA''', образующего угол ϑ с направлением движения источника.

Пусть теперь источник неподвижен относительно среды, а наблюдатель движется по отношению к источнику со скоростью $u_н$ (рис. 4.26). Частота источника по-прежнему равна ν_0. Если бы наблюдатель был неподвижен, то за секунду мимо него прошло бы ν_0 волн. Приближаясь к источнику со скоростью $u_н$, он встречает на своем пути за секунду столько добавочных волн, сколько их укладывается на отрезке длины $u_н$, т. е.



$$\Delta\nu = \frac{u_н}{\lambda_0}.$$

Рис. 4.25.

Следовательно, наблюдаемая им частота равна

$$\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu = \nu_0 + \frac{u_н}{\lambda_0}. \quad (57.3)$$

Подставляя вместо λ_0 его значение

$$\lambda_0 = \frac{v}{\nu_0},$$

получаем:

$$\nu_2 = \nu_0 + \nu_0 \frac{u_н}{v} = \nu_0 \frac{v + u_н}{v}. \quad (57.4)$$

Аналогично, при удалении от источника, когда наблюдатель догоняет волны, частота прохождения волн уменьшается. Эту частоту ν_1 легко получить, заменяя в (57.4) величину $u_н$ на $-u_н$:

$$\nu_1 = \nu_0 - \nu_0 \frac{u_н}{v} = \nu_0 \frac{v - u_н}{v}. \quad (57.4а)$$

Выражение для частоты ν при движении и источника волн и наблюдателя мы легко получим, комбинируя (57.2) и (57.4), (57.4а). Для этого нужно либо (в 57.2) вместо ν_0 подставить ν_1, ν_2 из (57.4), (57.4а), либо в (57.4), (57.4а) вместо ν_0 подставить ν', ν'' из (57.2). Тогда мы найдем:

$$\nu = \nu_0 \frac{v \pm u_н}{v \mp u_н}. \quad (57.5)$$

Верхний знак берется, если при движении источника или наблюдателя происходит их сближение; нижний знак — в случае их взаимного удаления.

Изменение частоты волны, воспринимаемой наблюдателем, в зависимости от его скорости по отношению к среде, в которой распространяются волны, а также от скорости источника волн по отношению к среде, носит название **эффекта Доплера**.

Математическое выражение этого эффекта в случае движения вдоль одной прямой дается формулой (57.5).

Заметим, что хотя явление Допплера наблюдается и в оптике, но там оно имеет совершенно иную природу. В случае световых

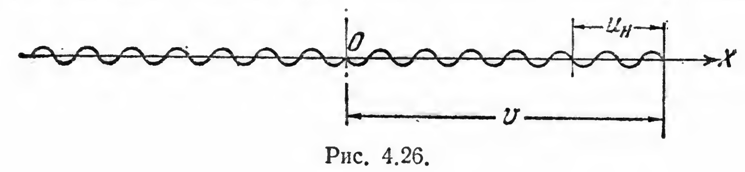


Рис. 4.26.

волн среда — носитель колебаний — отсутствует, световые волны материальны сами по себе. В этом случае нельзя, следовательно, вводить скорость источника и скорость наблюдателя (по отношению к среде) — эффект зависит только от их относительной скорости. К этому вопросу мы вернемся в томе III.

§ 58. Интерференция волн

Если через данную область пространства распространяется одновременно несколько волн, то колебания любой точки среды, вызванные каждой волной в отдельности, будут складываться друг с другом по правилам сложения колебаний, рассмотренным в § 53.

Это обстоятельство отнюдь не является очевидным и в ряде случаев может не иметь места. В § 53 рассматривалось движение изолированной материальной точки, для которой результирующее колебание равно сумме отдельных колебаний, в которых она участвует. Сейчас же речь идет о непрерывной упругой среде, все точки которой взаимосвязаны.

Напомним механизм возникновения колебаний любой частицы упругой среды. Эта частица приходит в движение в результате возникающих напряжений, вызванных деформацией среды (сжатием при продольной волне, сдвигом — при поперечной). Если складывающиеся колебания обладают малой амплитудой, то согласно закону Гука напряжения будут пропорциональны деформациям. Результирующее напряжение в этом случае будет равно сумме составляющих его, а результирующее колебание частицы среды будет равно сумме колебаний, вызванных отдельными волнами.

При больших амплитудах колебаний закон Гука уже не выполняется. Результирующее напряжение приводит к колебаниям, которые отличны от суммы колебаний, вызванных отдельными волнами. Подобные колебания имеют место при распространении так называемых **ударных волн**, возникающих при взрывах. Скорость ударных волн превышает скорость обычных волн и тем больше, чем больше их амплитуда.

Мы ограничимся здесь рассмотрением волн малой амплитуды. В этом случае *колебание каждой точки среды является суммой независимых колебаний, вызванных каждой из проходящих через данную точку волн в отдельности*. Другими словами, независимые волны, которые в процессе своего распространения одновременно проходят через одну и ту же точку среды, складываются, *но друг друга не искажают*. Перекрещивающиеся волны, разойдясь, не несут на себе никаких следов происшедшего наложения.

Если это имеет место, то принято говорить, что при наложении волн удовлетворяется принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции фактически впервые был сформулирован известным итальянским ученым эпохи Возрождения Леонардо да Винчи. Простейшей иллюстрацией его является независимое распространение волн по поверхности воды от двух брошенных камешков, изображенное на рис. 4.27. Обе волны в результате наложения не изменились (что не имело бы места в случае ударных волн).

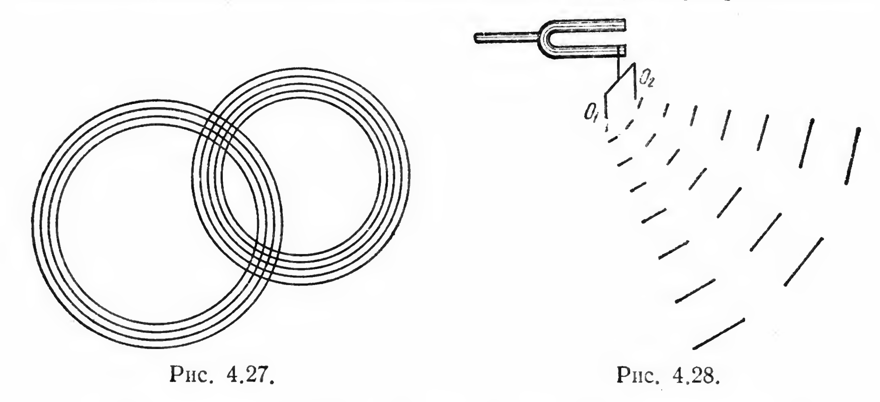


Рис. 4.27. Рис. 4.28.

Принцип суперпозиции и вычисленные нами в предыдущем параграфе выражения для скоростей распространения волн выполняются в точности лишь для волн бесконечно малой амплитуды. Для волн конечной амплитуды все эти соотношения являются лишь некоторым приближением к действительности, тем лучшим, чем меньше их амплитуда.

Ниже мы будем рассматривать только простейший случай синусоидальных волн очень малой амплитуды, подчиняющихся принципу суперпозиции.

Если частоты колебаний двух волн одинаковы и разность фаз не меняется со временем, то такие волны называются когерентными. В результате суперпозиции (наложения) когерентных волн наблюдается явление, носящее название интерференции волн. Для простоты рассмотрим суперпозицию когерентных волн на поверхности воды.

Когерентные волны можно получить, если источники волн связаны и совершают колебания совместно, например, если волны вызываются двумя стерженьками, погруженными в воду в точках O_1 и O_2 и прикрепленными к одной из ножек камертона (рис. 4.28).

Рассмотрим результирующее колебание в фиксированной точке M (рис. 4.29). Обозначим расстояние O_1M через x_1 и O_2M — через x_2. В рассматриваемом случае не только частóты, но и начальные фазы обоих источников волн совпадают; мы положим начальные фазы равными нулю.

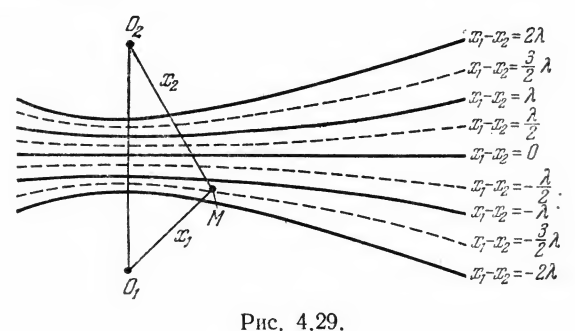


Рис. 4.29.

Согласно (55.8) колебание y_1, вызванное первой волной в точке M, будет равно

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right), \tag{58.1}$$

и, аналогично, колебание y_2, вызванное в этой же точке второй волной, составит:

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right), \tag{58.2}$$

где через A_1 и A_2 обозначены амплитуды обеих волн в точке M.

Рассмотрим важный для дальнейших разделов нашего курса случай, когда источники O_1 и O_2 имеют одинаковую мощность. В этом случае амплитуды обеих волн будут практически одинаковы, если x_1 и x_2 не очень отличаются друг от друга:

$$A_1 = A_2 = A. \tag{58.3}$$

Результирующее колебание y в точке M будет равно сумме двух колебаний, вызванных обеими волнами (так как оба колебания направлены одинаково). Как следует из (58.1), (58.2), (58.3), эти колебания будут отличаться лишь фазами φ_1 и φ_2 приходящих в точку M волн, поскольку эти фазы зависят от расстояний x_1 и x_2:

$$\varphi_1 = -2\pi \frac{x_1}{\lambda}, \quad \varphi_2 = -2\pi \frac{x_2}{\lambda}.$$

Следовательно, смещение y в точке M будет равно

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) + A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Вынося общий множитель A и используя формулу для суммы двух синусов, находим:

$$y = 2A\cos\left(2\pi\frac{x_1 - x_2}{2\lambda}\right)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}\right) = \\ = B\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}\right), \qquad (58.4)$$

где амплитуда результирующего колебания B имеет вид

$$B = 2A\cos\left(2\pi\frac{x_1 - x_2}{2\lambda}\right). \qquad (58.5)$$

В выражении (58.4) множитель, зависящий от времени, показывает, что y будет *гармоническим колебанием с тем же периодом T, что и для источников* (начальная фаза y для нас интереса сейчас не представляет).

Весьма существенно, *что амплитуда B суммарного колебания y зависит от разности расстояний точки M от источников.*

Рассмотрим два предельных случая.

1. Пусть р а з н о с т ь х о д а от источников до M равна целому числу длин волн:

$$x_1 - x_2 = n\lambda, \qquad (58.6)$$

где через n обозначено любое целое (положительное или отрицательное) число:

$$n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \ldots \qquad (58.7)$$

Во всех точках, в которых имеет место (58.6), для B получим:

$$B = 2A\cos n\pi = \pm 2A \qquad (58.8)$$

— амплитуда результирующего колебания удвоилась по сравнению с амплитудой каждой из волн, следовательно, волны взаимно усилились. Формула (58.8) дает максимальное возможное значение амплитуды, поскольку косинус не может принимать значения, большего единицы.

2. Пусть разность хода равна целому числу волн с половиной, или, что то же, нечетному числу полуволн:

$$x_1 - x_2 = n\lambda + \frac{1}{2}\lambda = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (58.9)$$

В этом случае

$$B = 2A\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (58.10)$$

— волны взаимно уничтожили друг друга.

Физически понять этот результат нетрудно. Если разность хода от источников волн одинаковой амплитуды до M равна целому числу длин волн [условие (58.6)], то в точке M обе волны одновременно вызовут одинаковое смещение — вверх либо вниз. Если разность хода отличается на целое число волн с половиной (нечетное число полуволн), то смещения, вызываемые волнами, одинаковы по величине, но противоположны по направлению. В таких точках волны гасят друг друга.

Геометрическое место точек, разность расстояний от которых до O_1 и O_2 равна постоянной величине, $x_1 - x_2 = \text{const}$, есть, как это доказывается методами аналитической геометрии, гипербола. Меняя значение n в выражениях $x_1 - x_2 = n\lambda$ и $x_1 - x_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$, получаем семейства гипербол, показанные на рис. 4.29.

Вдоль гипербол, показанных сплошными линиями, колебания происходят с максимальной амплитудой (здесь $x_1 - x_2 = n\lambda$).

Вдоль гипербол, показанных пунктиром, амплитуда равна нулю, так как $x_1 - x_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$. При переходе от одной гиперболы к соседней амплитуда плавно меняется в пределах от нуля и до $2A$.

В случае, если амплитуды волн A_1 и A_2 различны, то в точках (гипербол), удовлетворяющих условию (58.6), результирующая амплитуда равна

$$B = A_1 + A_2.$$

В точках, удовлетворяющих условию (58.9), полного погашения произойти не может, но амплитуда достигает наименьшего возможного значения, равного модулю разности амплитуд $|A_1 - A_2|$. В остальных точках пространства в зависимости от разности фаз складывающихся колебаний, т. е. от разности хода волн, амплитуда принимает различные значения, непрерывно меняясь в пределах

$$|A_1 - A_2| \leqslant B \leqslant A_1 + A_2. \qquad (58.11)$$

Это явление взаимного усиления или ослабления волн (в зависимости от значения $x_1 - x_2$), идущих от когерентных источников, и называется интерференцией волн. Аналогично можно рассмотреть интерференцию от многих точечных или непрерывно распределенных источников.

Вспомним теперь, что, как было доказано в § 52, энергия колебания E пропорциональна квадрату амплитуды, что справедливо для любой точки волнового поля. В простейшем случае равенства амплитуд интерферирующих волн находим, что энергия колебания в данной точке волнового поля пропорциональна B^2 и согласно (58.5)

$$E \backsim B^2 = 4A^2 \cos^2\left(2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda}\right). \qquad (58.12)$$

В области максимума амплитуд энергия возрастает в 4 раза (по сравнению с энергией колебаний, возбуждаемых одним источником) в области минимума — равна нулю.

Таким образом, при интерференции происходит перераспределение энергии в пространстве. Средняя же энергия по всему волновому полю от двух одинаковых источников, в соответствии с законом сохранения энергии, удваивается.

Интерференцию волн можно использовать для определения длины волны λ. В томе III будет показано, как можно таким способом определять длины волн светового излучения.

Покажем, как можно определить длину волны с помощью интерференции от двух щелей. Пусть поток волн с длиной λ, которую нужно определить, падает нормально на экран $Э_1$ (рис. 4.30) с двумя щелями, находящимися на расстоянии h одна от другой (ширину щелей примем, ради простоты, пренебрежимо малой по сравнению с длиной волны). Рассмотрим распределение интенсивности колебаний на экране $Э_2$, помещенном параллельно экрану со щелями на расстоянии R от последнего.

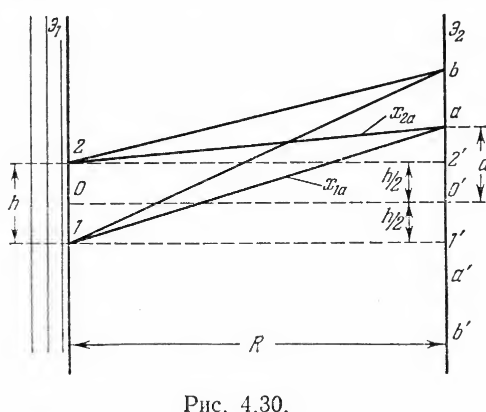


Рис. 4.30.

Щели *1* и *2* на $Э_1$ будут являться точечными источниками волн справа от $Э_1$, причем фазы обоих источников будут совпадать. В точке O' на экране $Э_2$, лежащей на равном расстоянии от обоих источников, мы получим, следовательно, максимум колебаний. Найдем теперь расстояние от O до симметрично расположенных точек a и a', в которых будут ближайшие к O' максимумы. Согласно (58.6) разность хода от источников *1* и *2* должна быть равна одной длине волны. Обозначая расстояния от *1* и *2* до a через x_{1a} и x_{2a} соответственно, имеем:

$$x_{1a} - x_{2a} = \lambda \qquad (58.13)$$

(для точки a' мы имели бы $x_{2a} - x_{1a} = \lambda$, и вычисление было бы тождественным с проведенным для точки a). Обозначим расстояние между максимумами $O'a$ через d. Из чертежа видно, что x_{1a} есть гипотенуза прямоугольного треугольника $11'a$ с катетами $1'1 = R$ и $1'a = d + \frac{h}{2}$, а x_{2a} — гипотенуза прямоугольного треугольника $22'a$, где катет $2'2 = R$, а катет $2'a = d - h/2$. Имеем,

следовательно:

$$\left.\begin{aligned} x_{1a}^2 &= R^2 + \left(d + \frac{h}{2}\right)^2, \\ x_{2a}^2 &= R^2 + \left(d - \frac{h}{2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (58.14)$$

Воспользуемся тем, что в выражении

$$x_{1a}^2 - x_{2a}^2 = (x_{1a} + x_{2a})(x_{1a} - x_{2a})$$

величина $x_{1a} + x_{2a}$ весьма мало отличается от $2R$ (так как и h, и d много меньше R). Полагая приближенно

$$x_{1a} + x_{2a} \approx 2R \qquad (58.15)$$

и $x_{1a} - x_{2a} = \lambda$ [согласно (58.13)], имеем: $x_{1a}^2 - x_{2a}^2 = 2R\lambda$. Внося сюда значения x_{1a}^2 и x_{2a}^2 из (58.14) и производя сокращения, находим: $2dh = 2R\lambda$, откуда

$$\lambda = \frac{h}{R} d. \qquad (58.16)$$

Предоставляем читателю показать (таким же путем), что не только расстояние $O'a'$ будет также равно d, но и для других, ближайших к центральному, максимумов расстояние между максимумами оказывается одинаковым и равным той же величине d.

Таким образом, зная характерное для используемого прибора отношение h/R и определяя на опыте d, можно найти длину волны λ падающего (нормально) на экран потока волн.

В § 53 было показано, что при наложении колебаний различных частот в некотором интервале $\Delta\omega$ можно получить колебание, ограниченное по своей длительности интервалом Δt. Причем эти интервалы оказались связанными между собой «соотношением неопределенностей»

$$\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi. \qquad (58.17)$$

Не проводя аналогичных выкладок с использованием выражения для распространяющейся волны (55.8), можно заключить, что волны одинаковой частоты, но с различной длиной волны и волновым вектором $k = 2\pi/\lambda$ (*волновой пакет*) в некотором интервале Δk могут практически полностью погасить друг друга вне некоторого участка Δx, связанного с Δk аналогичным соотношением неопределенностей

$$\Delta k\,\Delta x = 2\pi. \qquad (58.18)$$

Иными словами, волновой пакет, сосредоточенный в некоторой области пространства протяженностью Δx, имеет неопределенность в длине волны, вытекающую из соотношения (58.18). Чем в более узкой области Δx сосредоточен этот пакет, тем больше неопределенность в величине его волнового вектора Δk. Волна же с определенной длиной λ и волновым вектором $k = 2\pi/\lambda$ должна иметь

бесконечную протяженность в пространстве $\Delta x \to \infty$, т. е. заполнять все пространство.

Таким образом, законы движения волновых образований качественно отличаются от закономерностей движения частиц. Согласно классической механике, движущаяся материальная точка имеет в данный момент t вполне определенную энергию E, а, находясь в данном положении x, имеет одновременно и вполне определенную скорость $v_x = \frac{dx}{dt}$. Волновые же образования расплываются при своем движении согласно соотношениям неопределенностей (58.17) и (58.18). Локализация волнового пакета в строго определенной точке пространства ($\Delta x \to 0$) приводит к полной неопределенности в длине волны и связанной с последней (например, соотношением (55.6)) скорости распространения.

§ 59. Отражение волн. Стоячие волны

Волна, приходящая на границу раздела двух сред, частично проходит через нее, а частично отражается. При этом в зависимости от отношений плотностей этих сред процесс происходит по-разному. Начнем рассмотрение с двух предельных случаев:

а) вторая среда является менее плотной, а в пределе вообще отсутствует, т. е. упругое тело имеет свободную границу;

б) вторая среда более плотная, что отвечает в пределе неподвижно закрепленному концу упругого тела.

Рассмотрим распространение упругой, для определенности — продольной, волны в стержне для случая а). Пусть левый конец стержня связан с источником колебаний, а правый — свободен. Изучим отдельную деформацию, вызванную источником волны. Пусть, например, в результате движения источника у левого конца стержня возникла деформация сжатия. Эта деформация будет перемещаться вдоль стержня слева направо. Когда деформация достигнет правого, незакрепленного конца стержня, он в результате возникшего слева сжатия получит ускорение вправо. При этом в силу отсутствия упругой среды справа это движение не вызовет никакого дальнейшего сжатия. Деформация слева будет все уменьшаться, а скорость движения — расти. К моменту исчезновения деформации конец стержня будет двигаться с наибольшей скоростью. В силу инерции конца стержня движение в этот момент (в момент исчезновения деформации) не прекратится. Оно будет продолжаться с замедлением, вызывая слева деформацию, но теперь уже — растяжения. Последняя деформация будет перемещаться теперь справа налево.

Аналогично, созданная источником и перемещающаяся вправо деформация растяжения, отразившись от свободного конца стержня, будет перемещаться обратно в виде деформации сжатия. Когда источник совершает гармоническое колебание, он вызы-

вает в стержне попеременно деформации сжатия и растяжения. Эти деформации будут отражаться от свободного конца стержня соответственно в виде деформаций растяжения и сжатия. Поэтому в точке отражения за приходящим сжатием следует уходящее растяжение, и обратно, сжатие и растяжение чередуются в том же порядке, как и в свободно распространяющейся волне. Это значит, что на свободном конце стержня волна отражается, меняя свое направление на обратное, причем никакого изменения фазы волны в точке отражения не происходит. Сказанное иллюстрируется рис. 4.31, *а*. К стержню длины l в точке O присоединен источник гармонического колебания *И*. Сплошной кривой показана

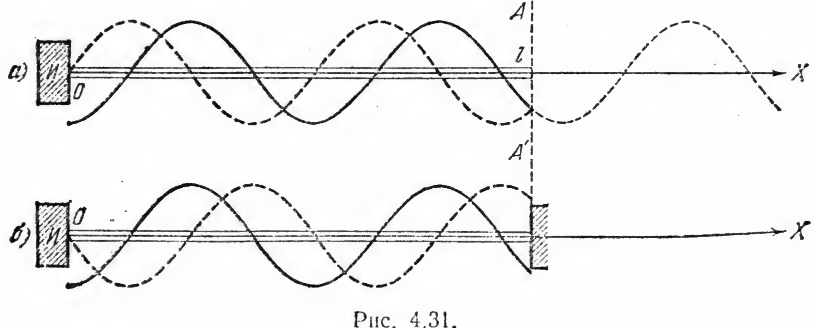


Рис. 4.31.

волна, распространяющаяся в стержне от источника направо. Тонкий пунктир показывает вид волны, если стержень не обрывался бы в точке l. Жирный пунктир соответствует волне, отраженной от свободного конца стержня l. Последняя имеет такой вид, как если бы волна, показанная тонким пунктиром, была повернута на 180°, т. е. отразилась от «зеркала» AA'.

Во втором предельном случае, когда правый конец упругого стержня закреплен неподвижно, дошедшая до него деформация сжатия не может привести этот конец в движение. Возникшее здесь сжатие начнет распространяться влево. Аналогично и деформация растяжения будет отражаться от неподвижно закрепленного конца стержня в виде такой же деформации растяжения. При гармоническом колебании источника за деформациями сжатия будут следовать деформации растяжения. Но при отражении от закрепленного конца за сжатием в приходящей волне будет следовать не растяжение, а сжатие в отраженной волне. За растяжением в приходящей волне будет следовать опять-таки растяжение в отраженной волне. Следовательно, процесс происходит так, как если бы в точке отражения терялась половина волны. Другими словами, фаза волны при отражении меняется на π или, как говорят, меняется на противоположную. Сказанное иллюстрируется рис. 4.31, *б*.

Волна, отраженная от закрепленного конца стержня, отличается в точке отражения от волны, отраженной от свободного конца стержня, обратной фазой — все смещения имеют ту же величину, но обратное направление.

Из чертежа можно непосредственно видеть, каким будет смещение концов стержня в обоих случаях. В случае свободного конца стержня смещения, вызванные пришедшей и отраженной волнами, складываются, так что конец стержня колеблется с удвоенной амплитудой. В случае закрепленного конца стержня приходящая и отраженная волны дают на конце равные по величине, но противоположные по направлению смещения, так что конец стержня остается неподвижным, чего и следовало ожидать, поскольку этот конец закреплен.

Рассмотренные примеры являются предельными случаями следующих реальных. Распространяющаяся от источника в среде *I* упругая волна приходит на границу раздела этой и менее плотной среды *II*. Волна, падающая на границу раздела двух сред, частично отразится, а частично пройдет во вторую среду. Отраженная волна, как и в предельном случае отсутствия второй среды (бесконечно малой плотности среды *II*), также не меняет фазы. Отличие от рассмотренного выше предельного случая будет состоять лишь в том, что амплитуда отраженной волны будет меньше: часть энергии падающей волны в этом случае тратится на возбуждение волн во второй среде.

Пример закрепленного конца является предельным для случая, когда вторая среда более плотная, чем первая. Очевидно, что и здесь проходящая волна не испытывает на границе раздела сред изменения фазы. Отраженная волна меняет фазу на обратную (т. е. на π). Амплитуда отраженной волны будет меньше, чем падающей, так как последняя расходует часть своей энергии на возбуждение волн во второй среде. Следует иметь в виду, что во второй среде скорость распространения волны v_{II} будет, вообще говоря, отличаться от скорости распространения волны v_I в первой среде. А так как частота волны сохраняется — она равна частоте колебаний на границе раздела двух сред, т. е. равна частоте источника волн ν, — то меняется длина волны $\lambda_{II} = v_{II}/\nu \neq \lambda_I = v_I/\nu$.

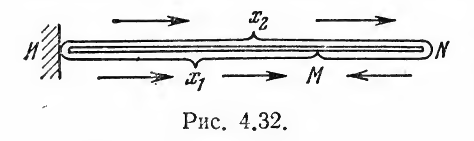


Рис. 4.32.

При непрерывной работе источника волна, идущая от него, будет складываться с отраженной волной и интерферировать. На рис. 4.32 изображен случай отражения от свободного конца N. В произвольную точку M приходят одновременно две волны, бегущие в противоположном направлении по прямой. Пренебрегая затуханием волны на участке MNM и при отражении, будем считать амплитуды прямой и отраженной волн одинаковыми и равными A. Разность хода этих волн $\delta = x_2 - x_1$ равна удвоенной длине от-

резка MN. Благодаря интерференции амплитуды колебаний точек стержня будут различными. В тех точках, где $x_2 - x_1 = 2 \cdot \overline{MN} = 2n\lambda/2$, фазы обеих волн одинаковы, волны складываются и результирующая амплитуда удваивается. В точки же стержня, где $x_2 - x_1 = 2 \cdot \overline{MN} = (2n+1)\lambda/2$, обе волны всегда приходят в противоположных фазах и взаимно уничтожаются. Такие точки, амплитуда колебаний в которых равна нулю, носят название у з л о в, а точки с максимальной амплитудой называются п у ч н о с т я м и стоячей волны. Амплитуды колебаний промежуточных точек изменяются по закону (58.5), как это видно из рис. 4.33, где штриховыми линиями даны предельные положения колеблющегося стержня. Для сравнения на том же рисунке штрих-пунктирной линией показано положение колеблющегося стержня в некоторый момент времени.

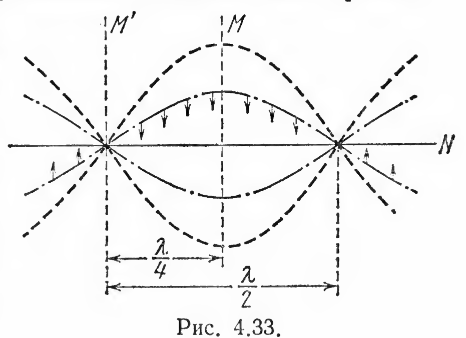


Рис. 4.33.

Изображенная на рис. 4.33 с т о я ч а я в о л н а качественно отлична от двух бегущих волн, результатом интерференции которых она является. В бегущей волне все точки колеблются с одинаковой амплитудой, но с различными фазами. В противоположность этому все точки стоячей волны колеблются с различными амплитудами, но в одной и той же фазе.

Расстояние от узла до соседней пучности $\overline{M'M} = \overline{M'N} - \overline{MN} = (2n+1)\lambda/4 - 2n\lambda/4 = \lambda/4$. Расстояние между двумя соседними пучностями (или узлами) равно половине длины волны $\lambda/2$. Это обстоятельство широко используется в практике для определения длин волн. Создавая путем отражения стоячую волну и измеряя в последней расстояния между узлами или пучностями, находят тем самым искомую величину λ.

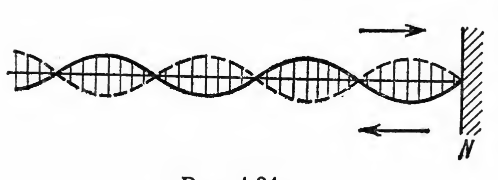


Рис. 4.34.

Если конец стержня не закреплен и падающая волна отражается от менее плотной среды, то, как мы видели выше, на границе раздела возникает пучность стоячей волны. Если конец стержня закреплен и тем самым падающая волна отражается от более плотной среды, то на границе раздела будет узел колебаний, как это показано на рис. 4.34, а при отражении произойдет потеря полуволны.

До сих пор мы рассматривали образование стоячих волн при отражении одномерной волны. Аналогично можно получить двумерные стоячие волны, например, при отражении волн, бегущих по поверхности воды, от плотины. В этом случае узлы и пучности образуются вдоль линий, параллельных линии берега. При изучении оптики и строения атома мы встретимся также со стоячими волнами в пространстве.

§ 60. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн

Как мы видели выше, упругие колебания передаются на большие расстояния не мгновенно, а распространяются постепенно, от одной точки среды к соседней. Это обстоятельство лежит в основе принципа, предложенного в конце XVII века голландским физиком Гюйгенсом для установления некоторых количественных закономерностей распространения волн.

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка волнового поля, пришедшая в колебание, становится сама источником вторичных волн. Результирующая волна, распространяющаяся дальше, возникает вследствие наложения и интерференции всех волн от этих вторичных элементарных источников.

Назовем *волновой поверхностью* геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Фронт волны также

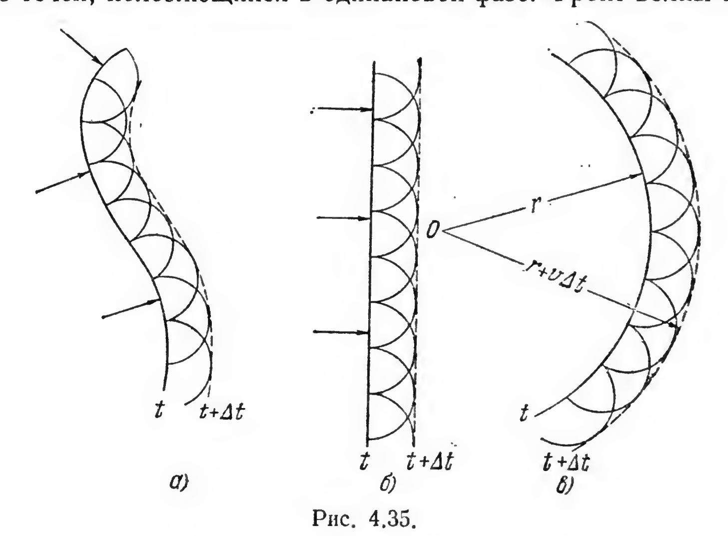


Рис. 4.35.

является волновой поверхностью, точки которой одновременно начинают колебательное движение. На рис. 4.35, *а* изображено положение фронта волны в некоторый произвольный момент времени t. С помощью принципа Гюйгенса можно найти вид фронта

волны через малый промежуток времени Δt. Для этого нужно из каждой точки фронта, являющейся вторичным источником волн, провести в направлении распространения сферическую волну радиуса $\Delta r = v\Delta t$, где v — скорость распространения волн. Новый фронт волны получается как о г и б а ю щ а я этих вторичных волн *).

Применяя построение Гюйгенса в случае плоской волны, изображенной на рис. 4.35, *б*, мы приходим к выводу, что в однородной среде плоская волна при своем распространении остается плоской. Аналогичным свойством сохранения формы обладает и сферическая волна, изображенная на рис. 4.35, *в*.

Построение Гюйгенса применимо и для волн, распространяющихся в неоднородной среде. В этом случае скорость распространения v будет меняться от точки к точке и соответственно будут различными радиусы полусфер, проводимых из разных точек исходного фронта. Для примера рассмотрим преломление плоской волны на границе раздела двух сред с различными скоростями распространения v_1 и v_2 (рис. 4.36). Пусть ABD есть положение фронта плоской волны в первой среде в момент времени t. Из точек B и D опишем вперед полусферы радиуса $v_1\Delta t$. Их огибающая $B'D'$ даст положение фронта волны в первой среде в момент $t + \Delta t$. Луч BB', перпендикулярный к фронту исходной волны, указывает направление ее распространения в первой среде. Угол α между направлением падающих лучей BB' и перпендикуляром к границе раздела называется у г л о м п а д е н и я.

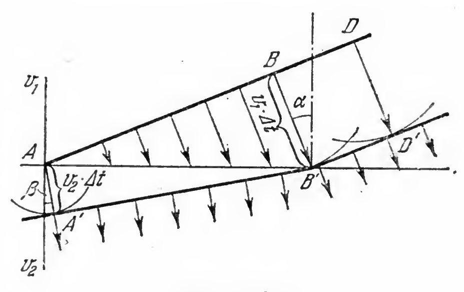


Рис. 4.36.

Из точки A, лежащей на поверхности раздела сред, опишем во второй среде полусферу радиуса $v_2\Delta t$. Для построения огибающей проведем из точки B' касательную к этой полусфере $A'B'$. Касательная $A'B'$ и будет изображать положение фронта волны во второй среде в момент $t + \Delta t$. Луч AA', перпендикулярный к этому фронту, укажет направление распространения этой волны. Угол β между направлением преломленных лучей и перпендикуляром к границе раздела называется у г л о м п р е л о м л е н и я.

Прямоугольные треугольники ABB' и $AA'B'$ имеют общую гипотенузу AB'.

---

*) Доказательство того факта, что вторичные волны не дают заметной волны, бегущей назад, может быть получено лишь из строгой математической теории волн, разработанной Кирхгофом.

Поэтому

$$AB' = \frac{v_1\,\Delta t}{\sin\alpha} = \frac{v_2\,\Delta t}{\sin\beta} \text{ и } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const}, \qquad (60.1)$$

т. е. *отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная*, не зависящая от направления падающего луча и *численно равная отношению скоростей распространения волн в обеих средах.*

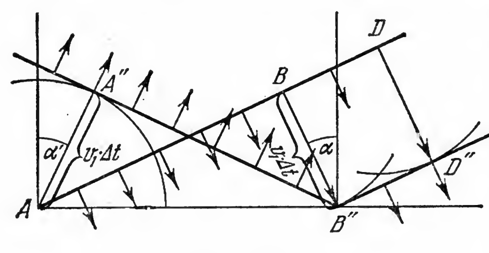


Рис. 4.37.

Аналогичным образом можно вывести и закон отражения. На рис. 4.37 изображен по-прежнему фронт падающей плоской волны ABD в момент времени t и построено его продолжение $B''D''$ в момент $t+\Delta t$. Из точки A опишем полусферу радиуса $v_1\Delta t$ в той же первой среде. Для построения огибающей проведем из точки B'' касательную $A''B''$ к этой полусфере. Касательная $A''B''$ будет изображать фронт отраженной волны, распространяющейся в той же среде в момент $t+\Delta t$. Перпендикулярный к ней луч AA'' указывает направление отраженной волны и пересекает перпендикуляр к границе раздела под некоторым углом α', называемым у г л о м о т р а ж е н и я. Прямоугольные треугольники $AA''B''$ и ABB'', как имеющие общую гипотенузу AB'' и одинаковые катеты $AA'' = BB'' = v_1\Delta t$, равны друг другу. Отсюда следует, что *угол падения равен углу отражения.* Если отсчитывать углы от перпендикуляра к границе раздела и принимать направление по часовой стрелке положительным, а против часовой стрелки — отрицательным, то закон отражения можно записать в виде

$$\alpha' = -\alpha. \qquad (60.2)$$

Принцип Гюйгенса позволяет объяснить характерное для волнового движения явление непрямолинейного распространения волн, носящее название д и ф р а к ц и и.

Рассмотрим плоскую волну, падающую на поверхность экрана, в котором имеется отверстие, малое по сравнению с длиной волны ($d \ll \lambda$). Когда фронт волны дойдет до экрана, вторичные источники, расположенные в плоскости отверстия, создадут расходящуюся от него сферическую волну за экраном, как это показано на рис. 4.38. Это иллюстрирует принцип Гюйгенса, согласно которому отверстие в экране можно рассматривать как одиночный элементарный источник (если ширина его много меньше λ).

Таким образом, волна распространяется, вообще говоря, непрямолинейно. При широком фронте волны прямолинейное рас-

пространение есть результат интерференции волн от многих вторичных источников. Однако и в этом случае ($d \gg \lambda$) на боковых границах волнового фронта будут наблюдаться отклонения от прямолинейного распространения (рис. 4.39).

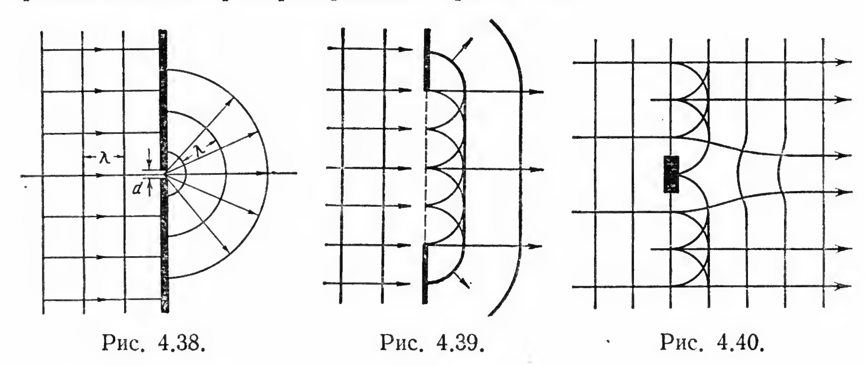


Рис. 4.38. Рис. 4.39. Рис. 4.40.

Аналогично можно показать, что в результате дифракции за малой по сравнению с длиной волны преградой не образуется тени (рис. 4.40), а преграда, соизмеримая с длиной волны, сильно рассеивает волны. В случае преграды, размеры которой много больше длины волны, за преградой образуется тень. Однако и здесь волны частично огибают препятствие, заходя в область геометрической тени (рис. 4.41).

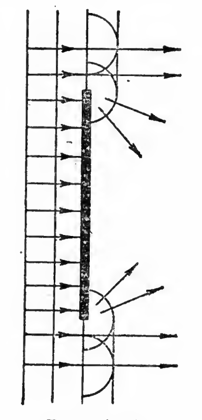


Рис. 4.41.

Назовем л у ч а м и линии, показывающие направления распространения волн. В однородной среде лучи являются семействами линий, перпендикулярных к волновым поверхностям. На предыдущих чертежах лучи указывались стрелками.

Построение лучей позволяет в ряде случаев сделать картину распространения волн более наглядной. Однако не следует забывать, что понятие луча является чисто вспомогательным, и приписывать ему слишком большой физический смысл, рассматривая, например, бегущую волну как совокупность распространяющихся лучей, нельзя. Действительно, в силу наличия дифракции волн выделить физически узкий пучок лучей из этой совокупности невозможно. Возвращаясь к рис. 4.39, мы видим, что попытка выделить тонкий пучок параллельных лучей, например с помощью экрана с малым отверстием, не приводит к цели.

Количественный расчет некоторых дифракционных явлений и их практические применения будут подробнее разобраны в оптике (том III).

ГЛАВА XV

ЗВУК

§ 61. Природа звука

Звук представляет собой колебания упругой среды, воспринимаемые нашими органами слуха.

Физиологическое восприятие звука является отражением соответствующих физических его характеристик. Так, гармоническое колебание определенной частоты воспринимается нами как определенный музыкальный тон. Физической характеристике — частоте колебаний — соответствует физиологическое понятие — высота звука. Малые частоты колебаний вызывают ощущение так называемого низкого тона (бас, баритон). Большие частоты колебаний вызывают ощущение звука высокого тона (сопрано, дискант). *Чем больше частота колебаний, тем больше высота тона воспринимаемого звука.*

Следует отметить, что благодаря своему устройству нормальное человеческое ухо способно воспринимать не любые колебания, а лишь такие, частота которых лежит в пределах от 16 до 20 000 колебаний в секунду. Этот интервал частот носит название собственно звуковых колебаний. Колебания с частотами, бо́льшими 20 000 герц (Гц), носят название ультразвуков и могут быть восприняты специальными приборами. Колебания с частотами, меньшими 16 Гц, носят название инфразвуков, и для их восприятия также сконструированы специальные приборы, расширяющие возможности наших органов чувств.

Несколько одновременно приходящих звуковых колебаний, частоты которых находятся в определенном соответствии, создают впечатление созвучия, приятного (консонанс) или неприятного (диссонанс). Большое число одновременных звуковых колебаний с самыми различными частотами создает впечатление шума.

Интенсивность звука может быть охарактеризована различными величинами. В звуковом поле периодически колеблются частицы среды, периодически меняются их скорости и силы давления (в жидкости или газе) или нормальные и касательные напряжения

(в твердых телах). Интенсивность звука может характеризовать амплитуда колебаний любой из этих величин. Однако, поскольку все эти величины, как показано в гл. XIII, связаны между собой определенными соотношениями, то целесообразно ввести единую энергетическую характеристику. Такая характеристика для волн любого типа была предложена в 1877 г. Н. А. Умовым.

В § 52 было показано, что полная энергия гармонически колеблющейся точки остается постоянной. В случае бегущей волны можно мысленно вырезать из фронта волны площадку dS (рис. 4.42). За время dt волна распространится на расстояние $v\,dt$ перпендикулярно к этому фронту. Если обозначить через W Дж/м^3 энергию единицы объема колеблющейся упругой среды, то энергия всех ее частиц, пришедших в колебательное движение в объеме $dSv\,dt$, будет равна $WdSv\,dt$ Дж. Эта энергия была принесена за время dt в данный объем волной, распространяющейся через площадку dS. Разделив полученную объемом энергию на dS и dt, мы получим величину потока энергии

$$\mathbf{I} = W\mathbf{v}, \qquad (61.1)$$

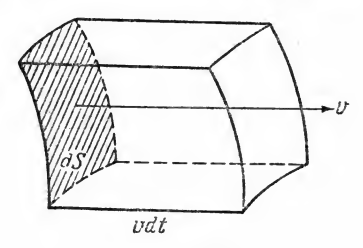


Рис. 4.42.

т. е. энергию, переносимую распространяющейся волной через единицу площади за единицу времени. Вектор $\mathbf{I}$ направлен в сторону распространения волны и носит название вектора Умова. Величина I измеряется в Вт/м^2 и для звукового поля называется силой звука.

Сила звука является физической характеристикой интенсивности звуковых колебаний. Мы оцениваем ее субъективно как громкость звука. Нормальное человеческое ухо способно воспринимать звуки, сила которых превышает некоторое минимальное значение, различное для различных частот,

$$I_{\text{мин}} = f(\nu). \qquad (61.2)$$

Величина $I_{\text{мин}}$ называется порогом слышимости звука и для средних частот $\nu \approx 10^3$ Гц, лучше всего воспринимаемых ухом, составляет около 10^{-12} Вт/м^2. При очень большой силе звука порядка 10 Вт/м^2 звук начинает восприниматься, кроме уха, органами осязания, а в ушах вызывает болевое ощущение.

Поскольку наше ухо способно воспринимать звуки, отличающиеся по силе в 10^{13} раз, то оно нечувствительно к малым изменениям силы звука и замечает прирост громкости звука при увеличении силы последнего не менее, чем на 10—20%. Поэтому в качестве характеристики интенсивности звука выбирают обычно не силу

звука I, а десятичный логарифм последней, точнее, величину

$$\beta = \lg I/I_0, \tag{61.3}$$

где I_0 — условно выбранный нулевой уровень $I_0 = 10^{-12}$ Дж/(м^2·с) = $= 10^{-12}$ Вт/м^2. Величина β называется уровнем силы звука и измеряется в белах (Б). Из (61.3) следует, что уровень силы звука в 1 Б соответствует силе звука, равной $I = 10\,I_0$. Наряду с этой единицей пользуются в 10 раз более мелкой единицей, называемой децибелом (дБ):

$$\beta = 10 \lg I/I_0 \text{ дБ}. \tag{61.4}$$

Для человеческих ощущений приближенно справедлив психофизиологический закон — *интенсивность ощущения пропорциональна логарифму степени раздражения*. Это означает, что уровень громкости звука пропорционален β.

Скорость распространения звука в различных средах различна. Как мы видели выше (в § 56), в твердых телах могут распространяться звуковые упругие колебания двух типов: продольные и поперечные. В изотропных твердых телах скорости этих двух типов колебаний равны соответственно

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{E/\rho}, \tag{61.5}$$

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{G/\rho}, \tag{61.6}$$

где E — модуль упругости, G — модуль сдвига и ρ — плотность среды. В анизотропных кристаллах упругие свойства и модули упругости различны по разным направлениям. Поэтому скорость звука в анизотропных телах зависит от направления распространения волны по отношению к кристаллографическим осям, а для поперечных волн — еще и от ориентации плоскости их поляризации.

В жидкостях могут распространяться практически только продольные звуковые волны сжатия и разрежения. Их скорость равна

$$v_{\text{ж}} = \sqrt{K/\rho}, \tag{61.7}$$

где K — объемный модуль упругости жидкости. В твердых телах скорость звука составляет от 2 до 5 км/с, а в жидкостях от 0,7 до 2 км/с (в воде $v_{\text{зв}}$ = 1,34 км/с).

Для скорости распространения упругих колебаний в газе мы вывели в гл. XIV два выражения (56.12) и (56.13) в зависимости от термических характеристик процесса. Формула (56.12) принадлежит Ньютону, который предполагал, что звук распространяется изотермически. Однако опыт показал, что даже для звуковых колебаний с минимальными частотами за время одного колебания ($\sim 0{,}1$ с) температура между сжатыми (и тем самым разогретыми) и разреженными (и тем самым охлажденными) областями волны не успевает выравниваться. Практически *процесс распространения звука можно считать адиабатическим,* так что скорость распространения

звука в идеальном газе определяется выражением

$$v_г = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/\mu}, \qquad (61.8)$$

где $\gamma = C_p/C_V$ — отношение теплоемкостей при постоянном объеме и постоянной температуре.

Для одноатомных газов $\gamma = 1{,}67$, а для многоатомных γ приближается к единице. Поэтому, сравнивая выражение (61.8) со скоростью хаотического теплового движения молекул газа

$$\bar{v}_{мол} = \sqrt{3RT/\mu}, \qquad (61.9)$$

мы видим, что $v_{мол}$ лишь ненамного превышает скорость звука. В частности, для воздуха при 0 °С $v_{мол} = 500$ м/с, а $v_{зв} = 331$ *м/с*.

Анализируя выражение (61.8), видим, что скорость звука в газе зависит не от давления p и плотности ρ по отдельности, а от их отношения, т. е. в конечном счете от абсолютной температуры газа T. Если поместить звонок под колокол воздушного насоса и откачивать воздух, то одновременное уменьшение плотности и давления не изменит скорости распространения звука под колоколом. Откачка воздуха будет уменьшать лишь интенсивность звука, поскольку по мере разрежения язычок звонка будет приводить в колебание все меньшие и меньшие массы воздуха. Наконец, в полном вакууме распространение звука прекратится вовсе из-за отсутствия упругой среды.

Таким образом, скорость звука в газах зависит от температуры и состава газа, поскольку последний влияет на величину γ и μ. В частности, для наиболее легкого газа — водорода ($\mu = 2$) скорость звука максимальна и при 0 °С равна 1263 м/с.

§ 62. Распространение звука. Источники и приемники звука

Если размеры источника малы по сравнению с длиной волны, то от него распространяется во все стороны сферическая звуковая волна (рис. 4.43). Если же размеры источника велики по сравнению с длиной волны, то вследствие интерференции и дифракции он излучает направленную звуковую волну (рис. 4.44). В воздухе при $v = 331$ м/с и $\nu_{мин} = 16$ Гц соответственно длина волны $\lambda_{макс} = 331 \text{ м/с}/16 \text{ с}^{-1} = 20{,}7$ м. При $\nu_{макс} = 20\,000$ Гц соответствующая длина волны в воздухе $\lambda_{мин} = 331 \text{ м/с}/20\,000 \text{ с}^{-1} = 0{,}0165 \text{ м} = 16{,}5$ мм.

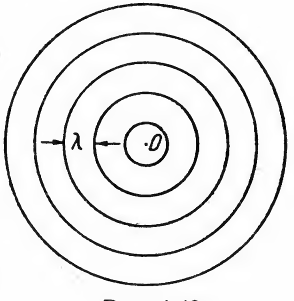


Рис. 4.43.

Поэтому для получения направленного звукового пучка на обычных речевых частотах (300—2000 Гц) необходимо применять рупоры диаметром порядка 1 м. Для получения же направленных ультразвуковых пучков ($\lambda_{уз} < 0{,}0165$ м) применяются

излучающие пластинки диаметром в несколько сантиметров. При указанных выше длинах волн звука можно наблюдать дифракционные явления, в частности огибание звуком препятствия даже большой протяженности (стена, дом).

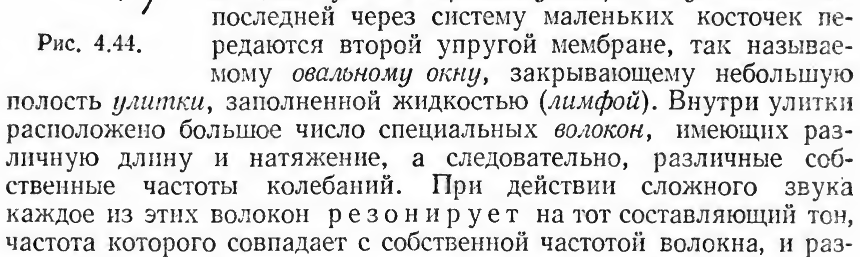


Рис. 4.44.

При встрече с препятствием больших размеров звуковые волны отражаются и возвращаются обратно. Это явление называется э х о. В гористой местности благодаря многократному отражению звука наблюдается длительное эхо, иногда до 5—10 с.

Человек обладает довольно сложным аппаратом для восприятия звуков. Звуковые колебания собираются *ушной раковиной* и через слуховой канал воздействуют на *барабанную перепонку*. Колебания последней через систему маленьких косточек передаются второй упругой мембране, так называемому *овальному окну*, закрывающему небольшую полость *улитки*, заполненной жидкостью (*лимфой*). Внутри улитки расположено большое число специальных *волокон*, имеющих различную длину и натяжение, а следовательно, различные собственные частоты колебаний. При действии сложного звука каждое из этих волокон р е з о н и р у е т на тот составляющий тон, частота которого совпадает с собственной частотой волокна, и раздражает соответствующее окончание слухового нерва. Набор резонансных частот в слуховом аппарате и определяет область воспринимаемых нами звуковых колебаний (16—20 000 Гц).

Наличие у человека двух ушей позволяет определять направление приходящего звука (б и н а у р а л ь н ы й э ф ф е к т). Как видно из рис. 4.45, разность хода двух звуковых лучей при угле между направлением на источник звука и плоскостью симметрии человеческого тела, равном φ, составляет $\Delta l = a \sin \varphi$, где $a \approx 20$ см — среднее расстояние между ушами. При $\varphi = 3°$ разность хода $\Delta l \approx 1$ см, а разность времен достижения сигналом обоих ушей $\Delta t = \Delta l / v_{зв} \approx 3 \cdot 10^{-5}$ с. При периоде колебания $T = 10^{-4}$ с сдвиг фазы между обоими звуковыми ощущениями достигает 0,3 от периода и вполне ощутим. Для высоких частот и малых длин волн голова создает

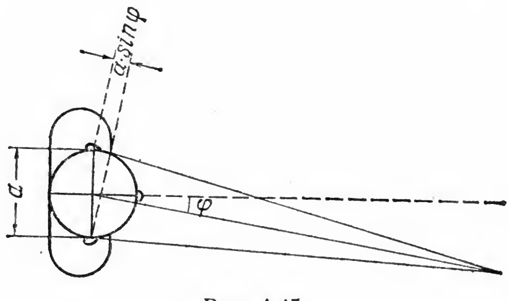


Рис. 4.45.

уже значительную акустическую «тень», что вызывает заметную разность амплитуд сигналов в обоих ушах.

Если от источника малых размеров звук распространяется одинаково во все стороны, то сила звука будет убывать с ростом расстояния от источника. Считая источник практически точечным, опишем из него сферу произвольного радиуса r м. Пусть мощность источника равна П Дж/с. Тогда *сила звука* I на расстоянии r от источника, очевидно, равна

$$I = \frac{\Pi}{4\pi r^2}\ \text{Вт/м}^2, \qquad (62.1)$$

т. е. *убывает обратно пропорционально квадрату расстояния*. В противоположность этому, для направленного звукового пучка площадь поперечного сечения пучка, а следовательно, и сила звука должны практически не зависеть от расстояния до источника.

Однако и в этом случае наблюдается затухание звука, связанное с различными необратимыми процессами, происходящими в звуковой волне. При колебательных движениях частиц упругой среды между ними возникают силы внутреннего трения (вязкость), и за счет работы последних часть звуковой энергии непрерывно переходит в тепло. Кроме того, как уже указывалось выше, в звуковой волне в каждый данный момент в соседстве находятся разогретые области сжатия и охлажденные области разрежения. Вследствие теплопроводности среды разность температур между этими областями выравнивается, что снижает максимальное давление и максимальное разрежение, т. е. амплитуду звуковой волны. Это в свою очередь связано с уменьшением энергии колебаний, переходящей в тепло. Таким образом, внутреннее трение (вязкость) и теплопроводность среды приводят к поглощению звуковой энергии и непрерывному уменьшению интенсивности распространяющейся звуковой волны. Если $I(x)$ есть сила (поток) звука, прошедшего в поглощающей среде путь x, то при прохождении следующего элементарного слоя dx часть этого потока, пропорциональная dx, поглотится и поток изменится на величину

$$dI = -\alpha I\,dx,$$

где α — линейный коэффициент поглощения звука данной средой. Полученное соотношение для дифференциалов можно преобразовать к виду

$$0 = dI/I + \alpha\,dx = d(\ln I) + d(\alpha x) = d[\ln I + \alpha x],$$

откуда

$$\ln I + \alpha x = \text{const} = \ln I_0,$$

где I_0 есть начальная сила звука, входящего в среду, при $x = 0$. Потенцируя последнее равенство, получаем окончательное

выражение для изменения силы звука с расстоянием:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}. \tag{62.2}$$

Величина α возрастает примерно пропорционально квадрату частоты звука, поэтому низкие звуки распространяются дальше высоких. Особенно сильно поглощаются ультразвуки. Так, при частоте 1 МГц = 10^6 Гц ультразвук распространяется в воздухе на 5 см. Коэффициент поглощения звука в воде примерно в 700 раз меньше, чем в воздухе. Соответственно во столько же раз больше дальность распространения звука. Так, при частоте 0,1 МГц = = 10^5 Гц она равна в воде 3 км. Это обстоятельство позволяет осуществлять связь и гидролокацию в воде на ультразвуковых частотах, при которых легче создать направленные пучки и избежать уменьшения интенсивности с расстоянием по закону (62.2).

При частотах $\nu \sim 10^9$ Гц в газах длина волны ультразвука $\lambda = v/\nu = 3 \cdot 10^2/10^9 = 3 \cdot 10^{-7}$ м, т. е. становится сравнимой с длиной свободного пробега молекул при атмосферном давлении. Поскольку механическая связь между соседними объемами газа осуществляется обменом молекул и взаимными столкновениями последних (см. теорию явлений переноса), то при столь коротких волнах газ уже нельзя рассматривать как сплошную упругую среду. Практически в этом случае вся энергия ультразвука будет поглощаться на протяжении одной длины волны.

В пористых материалах (войлок, бархат, штукатурка и т. п.) воздух заключен в огромном числе канальцев неправильной формы. При звуковых колебаниях эти отдельные объемы воздуха испытывают сильное трение о стенки канальцев, поэтому подобные материалы интенсивно поглощают падающие на них звуковые волны.

В архитектурной акустике для больших помещений (залы, аудитории) играет существенную роль так называемая *гулкость*, или *реверберация* этих помещений. Звуки испытывают многократное отражение (эхо) от ограждающих поверхностей и воспринимаются слушателем в течение некоторого довольно длительного промежутка времени. Подобная гулкость помещения увеличивает силу доходящего до нас звука, однако при слишком длительной реверберации отдельные звуки речи начинают накладываться один на другой и речь перестает восприниматься членораздельно. Поэтому стены залов и аудиторий покрывают специальными звукопоглощающими материалами для уменьшения гулкости.

Источником звуковых колебаний может служить любое колеблющееся тело: язычок звонка, камертон, струна скрипки или рояля, столб воздуха в духовых инструментах и т. п. Те же самые тела могут служить и приемниками звука, когда они приходят в движение под действием колебаний окружающей их упругой среды. Когда источником или приемником звука служит протяженное тело, обладающее множеством степеней свободы, то характер его колебаний

отличается от рассмотренного выше идеализированного случая колебаний материальной точки с одной степенью свободы.

Для выяснения возникающих в этом случае качественно новых явлений рассмотрим пример колебаний струны длины l, закрепленной по краям и натягиваемой с силой S ньютонов (рис. 4.46). Из условий закрепления струны вытекает, что концы струны должны оставаться неподвижными, т. е. на краях струны всегда должны быть узлы колебаний. Если других узловых точек на всей длине

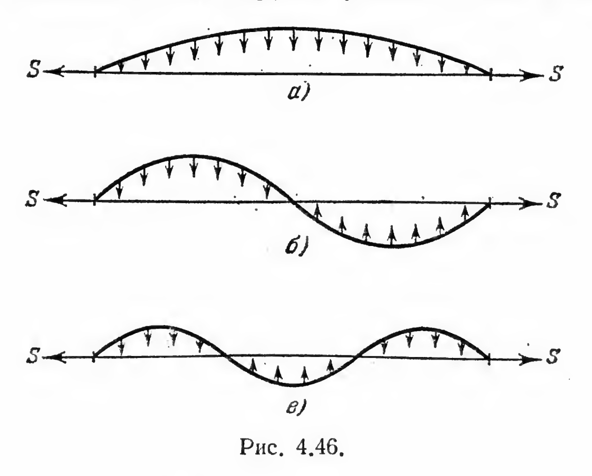


Рис. 4.46.

струны нет, то струна будет колебаться как целое (рис. 4.46, *а*) и длина стоячей волны λ_0 будет равна удвоенной длине струны:

$$\lambda_0 = 2l. \qquad (62.3)$$

По аналогии с формулами (61.5) и (61.6) скорость распространения колебаний вдоль натянутой струны будет равна

$$v_c = \sqrt{S/\rho'}, \qquad (62.4)$$

где ρ' — масса единицы длины струны (кг/м). Следовательно, частота колебаний возникающего звука, так называемого **основного тона струны**, равна

$$\nu_0 = \frac{v_c}{\lambda_0} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{S}{\rho'}} \qquad (62.5)$$

и зависит от длины струны l, ее массы ρ' и натяжения S.

По условиям возбуждения струна может начать колебаться и так, как это изображено на рис. 4.46, *б*, т. е. с одним дополнительным узлом посредине. Тогда на расстоянии l будет укладываться уже одна стоячая волна длиной $\lambda_1 = \lambda_0/2$, а соответствующая частота колебаний $\nu_1 = 2\nu_0$. Если по длине струны возникнут два дополни-

тельных узла, как показано на рис. 4.46, *в*, то соответствующая длина стоячей волны $\lambda_2 = \lambda_0/3$, а частота колебаний струны $\nu_2 = 3\nu_0$ и т. д. Таким образом, колеблющаяся струна наряду с о с н о в н ы м т о н о м частоты ν_0 издает еще целый ряд так называемых о б е р т о н о в, или в ы с ш и х г а р м о н и к с частотами

$$\nu_n = (n+1)\,\nu_0. \tag{62.6}$$

Примесь этих гармоник к основному тону создает «окраску», или т е м б р звука. Различные тела, издающие один и тот же основной тон, или различные люди, поющие одну и ту же музыкальную ноту, по-разному окрашивают ее примесью свойственных им гармоник, т. е. их звуки обладают различным тембром. Тембр звука характеризуется так называемым с п е к т р о м ч а с т о т, изображенным на рис. 4.47. По оси абсцисс на этом рисунке отложены частоты, а по оси ординат — амплитуды отдельных составляющих гармонических колебаний.

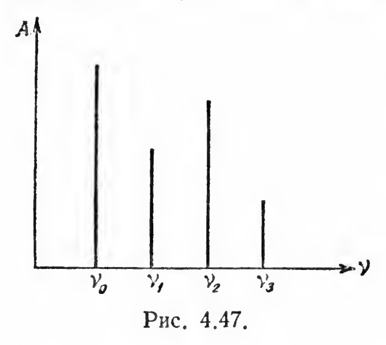


Рис. 4.47.

За последние десятилетия широко развилась область технических применений электроакустики, т. е. преобразования электрических колебаний в звуковые, ультразвуковые и обратного их превращения в электрические колебания. Эти методы будут описаны в томе II. Сейчас же укажем лишь на некоторые технические применения ультразвука.

Малая длина волны ультразвука обусловливает легкость получения направленных ультразвуковых пучков. Пропуская пучок ультразвуковых лучей через металлическую деталь, можно обнаружить в ней раковины и другие внутренние дефекты по характерному рассеянию пучка от границ дефекта и появлению ультразвуковой тени. На этом принципе основана так называемая у л ь т р а з в у к о в а я д е ф е к т о с к о п и я, созданная С. Я. Соколовым.

Для определения глубины моря под кораблем применяют так называемый эхолот. Источник ультразвука в днище корабля периодически посылает сигналы. Отражаясь от поверхности дна моря, звук возвращается к кораблю и попадает в соответствующий приемник. По времени прохождения сигнала до дна и обратно Δt определяется глубина моря

$$h = v_{зв}\cdot\Delta t/2. \tag{62.7}$$

Применение обычных звуковых частот может привести к ошибкам в случае неровного дна, так как волна, отраженная от бо-

ковых выступов дна, может вернуться раньше, чем от точек, расположенных непосредственно под кораблем. Поэтому в эхолоте существенно применение направленных ультразвуковых пучков. Таким же образом может быть обнаружено присутствие под водой посторонних тел, например подводной лодки или рыбного косяка. Эти методы ультразвуковой *гидролокации* были изобретены П. Ланжевеном.

Ультразвуковые волны большой амплитуды широко применяются в настоящее время в технике для механической обработки твердых материалов и т. п.

Как указывалось выше, ультразвуковые волны в воздухе сильно затухают. Это обстоятельство несколько затрудняет осуществление связи с помощью ультразвуковых сигналов и передачи их на большие расстояния.

В природе ультразвуковой локацией пользуются летучие мыши. Как показали наблюдения, слепые летучие мыши охотятся за насекомыми, легко минуя преграды — ветки деревьев, натянутые провода и т. д. Оказалось, что летучие мыши в полете периодически испускают свист в диапазоне не улавливаемых человеческим ухом ультразвуковых частот. В отличие от обычных звуковых волн сравнительно большой длины короткие ультразвуковые волны хорошо рассеиваются на самых незначительных преградах. Прослушивая в паузы между испускаемыми сигналами отраженные и возвращающиеся к ней ультразвуки, летучая мышь легко ориентируется в пространстве.

Колебания с частотами меньше 16 Гц — *инфразвуки* — также могут найти практическое применение. Укажем лишь на пример так называемого «голоса моря», обнаруженного В. В. Шулейкиным. Шторм на море создает длинные звуковые волны, имеющие низкую частоту (8—13 Гц). Скорость ветра и передвижение шторма порядка 20—30 м/с, скорость же звука и в воздухе и в воде значительно больше. Поэтому инфразвуковой, очень низкий «голос моря» опережает шторм и сигнализирует о его приближении. Некоторые морские животные способны воспринимать столь низкие звуки и прячутся задолго до приближения бури, когда даже барометр еще не предсказывает шторма. С. В. Доброклонским были сконструированы соответствующие приборы, сигнализирующие о приближении шторма.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕРОЯТНОСТЯХ

1. Определение вероятности. Пусть в результате некоторого процесса должно произойти одно из нескольких альтернативных *) событий A: либо A_1, либо A_2, ..., либо A_k (например, при выстреле в цель пуля может попасть либо в 10, либо в 9, ..., либо в 0, т. е. пролететь мимо цели, итого 11 возможных событий). Как оценить шансы того, что из всех возможных событий произойдет заданное, например A_5? В общем случае для такой оценки нужно предварительно произвести множество проб.

Пусть при N пробах событие A_1 произошло n_1 раз, событие A_2 — n_2 раз и т. д. Очевидно, что если все возможные события учтены, то

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = N. \tag{I.1}$$

Чем больше шансов у A_5, тем больше будет n_5 (разумеется, при данном N). Но этого еще недостаточно для строгого определения шансов A_5. Очевидно, что при повторных сериях из N проб будут получены несколько иные значения n_5. Ясно также, что если увеличивать N, то и n_5 будет увеличиваться в среднем пропорционально N, а отношение n_5/N с ростом N должно стремиться к определенному пределу. В соответствии с этим мы оценим вероятность события A_i следующим образом:

$$w_i = \lim_{N \to \infty} \frac{n_i}{N}. \tag{I.2}$$

Разумеется, $N = \infty$ недостижимо, и (I.2) означает лишь, что наши выводы тем точнее, чем больше N. Помня это, будем писать вместо (I.2)

$$w_i = n_i/N, \tag{I.3}$$

откуда

$$n_i = w_i N. \tag{I.4}$$

Формула (I.4) дает нам вероятное число событий A_i при N пробах (при w_i, определенном строго с помощью (I.2)). Это, конечно, не означает, что при каждой конкретной пробе из N событий событие A_i случится именно n_i раз. Прогноз имеет вероятностный характер, и числа этих событий будут колебаться около значения (I.4). Однако относительные отклонения $\Delta n_i/n_i$ с ростом N будут уменьшаться — наш прогноз будет тем точнее, чем больше N. Отметим, далее, что при выбранном N величина n_i, определенная из (I.4), может оказаться нецелой, что для числа событий нелепо. В этом случае наилучшую оценку дает ближайшее целое число.

*) Альтернативных — значит взаимно исключающих друг друга: если пуля попала в 7, значит, она не попала в 6, 8 и т. д.

Разделим (I.1) на N. Учитывая (I.3), получим

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} = \frac{N}{N}, \text{ т. е. } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \tag{I.5}$$

Значит, *вероятность любого события не может быть больше единицы.* Если при данных условиях может реализоваться одно-единственное событие, например A_0, то оно будет наступать при каждой пробе, т. е. $n_0 = N$, откуда $w_0 = n_0/N = 1$ — *вероятность достоверного события равна единице.* Если событие A_e невозможно, то $n_e = 0$ и $w_e = 0$ — *вероятность невозможного события равна нулю.* Таким образом, вероятность любого события может меняться в пределах

$$0 \leqslant w \leqslant 1. \tag{I.6}$$

Для многих случаев вероятность события можно определить и не прибегая к опытам, если можно оценить относительную вероятность возможных событий. Так, при бросании монеты может иметь место одно из двух событий: выпадет «орел» либо «решка». Ни одно из них не имеет преимущества перед другим, следовательно, эти события равновероятны. Учитывая, что согласно (I.5) сумма вероятностей всех возможных событий равна единице, находим для искомых вероятностей $w_о = w_р = 1/2$.

2. Закон сложения вероятностей. Рассмотрим конкретный пример. Пусть в ящике имеется 50 перенумерованных, одинаковых на ощупь шаров. Первые 10 — белые, шары с номерами от 11-го до 30-го — красные и от 31-го до 50-го — зеленые. Шансы быть вытащенными у всех шаров одинаковы. Значит, вероятность вытащить шар с данным номером, например 23, равна $w_{23} = 1/50$ (и, разумеется, $w_{64} = 0$, ибо с таким номером шаров вообще нет).

Какова вероятность вытащить *белый* шар, независимо от его номера? Обратимся к формуле (I.1). Выделяя при пробах белые шары, мы найдем, что их число $n_б$ определяется суммой $n_1 + n_2 + \ldots + n_{10}$ (после каждой пробы, естественно, шар возвращается в ящик и они перемешиваются). Поделив эту сумму на N, найдем

$$\frac{n_б}{N} = \sum_{i=1}^{10} \frac{n_i}{N}, \quad \text{или} \quad w_б = \sum_{i=1}^{10} w_i = 1/5. \tag{I.7}$$

Аналогично

$$w_к = \sum_{i=11}^{30} w_i = 2/5 \text{ и } w_з = \sum_{i=31}^{50} w_i = 2/5 \tag{I.8}$$

— красные шары будут попадаться вдвое чаще, чем белые, зеленые — тоже.

Попался белый шар. Это событие, которое реализуется несколькими альтернативными способами: можно вытащить шар с номером 1, либо с номером 2, ..., либо с номером 10. Мы видим, что искомая вероятность равна сумме вероятностей перечисленных событий:

Если событие A реализуется одним из ряда альтернативных событий A_1, A_2, ..., A_k, вероятности которых есть w_1, w_2, ..., w_k соответственно, то вероятность события A есть

$$w_A = \sum_i w_i. \tag{I.9}$$

3. Закон умножения вероятностей. Рассматриваемые до сих пор события были простыми, хотя и могли реализоваться различными способами. Однако часто приходится иметь дело со сложными событиями, состоящими из нескольких простых. Пусть, например, из описанного ящика с шарами извлекаются по очереди два шара (после каждой пробы, конечно, возврат

и тщательное перемешивание!). Какова вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, второй — красным?

Проделаем N проб. Число ожидаемых удач с первым шаром есть

$$n_{1б} = w_б N. \tag{I.10}$$

Число ожидаемых удач со вторым шаром при этом будет

$$n_{2к} = w_к n_{1б}. \tag{I.11}$$

Здесь справа вместо N мы пишем $n_{1б}$, так как при неудаче с первым шаром результат со вторым уже ничего не меняет — нужная комбинация шаров не достигнута. Подставляя в (I.11) значение $n_{1б}$ из (I.10), получаем

$$n_{2к} = w_б w_к N. \tag{I.12}$$

Но $n_{2к}$ и есть число удач $n_{бк}$ (когда первый шар оказался белым, второй — красным) при N пробах, а коэффициент справа при N — вероятность ожидаемого сложного события, т. е.

$$n_{бк} = n_{2к} = w_{бк} N. \tag{I.13}$$

Сравнивая (I.12) и (I.13), находим

$$w_{бк} = w_{1б} w_{2к}. \tag{I.14}$$

При выбранном числе шаров каждого цвета $w_{бк} = (1/5)\cdot(2/5) = 2/25$. Аналогичным образом, вероятность сложного события — вынуть в первый раз белый шар, затем красный и, наконец, зеленый, — как легко найдет читатель, равна

$$w_{бкз} = w_{1б} w_{2к} w_{3з}. \tag{I.15}$$

Вероятность сложного события равна произведению вероятностей составляющих его простых событий:

$$w_{аб\ldots к} = w_а w_б \ldots w_к. \tag{I.16}$$

Легко видеть, что в случае двух шаров для вероятности $w_{кб}$ вытащить раньше красный шар, а затем белый имеем $w_{кб} = w_{бк}$. Аналогично в случае трех шаров $w_{бкз} = w_{бзк} = w_{кбз} = w_{кзб} = w_{збк} = w_{зкб}$.

Поставим теперь вопрос иначе. Чему равна вероятность вытащить три шара разных цветов? Поскольку здесь последовательность событий, в отличие от предыдущих случаев, не оговорена, очевидно, что условию задачи отвечают все шесть случаев, вероятности которых мы сейчас выписали. В данном случае сложное событие может быть реализовано шестью альтернативными способами, значит, согласно закону сложения вероятностей искомая вероятность равна сумме перечисленных. Учитывая их равенство, имеем

$$w = w_{бкз} + \ldots + w_{зкб} = 3! w_{бкз}. \tag{I.17}$$

При выбранном числе шаров каждого цвета $w_{бкз} = 4/125$; $w = 24/125$.

Предоставляем читателю доказать, что: 1) вероятность вытащить белый шар, а затем два цветных равна 16/125; 2) вероятность вытащить три белых шара равна 1/125; 3) вероятность вытащить три одноцветных равна 17/125.

II. СТОЛКНОВЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

1. В § 25 при расчете длины свободного пробега молекул последние рассматривались как твердые, абсолютно упругие шарики. Позднее, в § 40, на рис. 3.6 был изображен примерный характер межмолекулярного взаимодействия. Наличие сил притяжения на расстояниях, превышающих сумму радиусов молекул,

должно несколько увеличить вероятность столкновения, особенно при низких температурах. Оценим этот эффект, используя методы, развитые в первых трех частях настоящего тома.

Рассматривая относительное движение, будем считать одну из соударяющихся молекул неподвижной (тело отсчета), а вторую — движущейся в поле центральной силы, характеризуемой радиусом-вектором **r**, проведенным от центра неподвижной молекулы к центру движущейся. Силы отталкивания на малых расстояниях по-прежнему заменим непроницаемостью молекул, когда расстояние между центрами станет равным d.

Закон сохранения энергии для налетающей молекулы имеет вид

$$mv^2/2 + U(r) = \text{const} = mv_0^2/2. \tag{II.1}$$

На большом расстоянии скорость молекулы v_0, а потенциальная энергия равна нулю. По мере сближения потенциальная энергия притяжения становится все более отрицательной, величина скорости v возрастает. С другой стороны, если бы притяжение отсутствовало, то молекула, двигаясь равномерно и прямолинейно, пролетела бы мимо на прицельном расстоянии $p > d$ и не столкнулась. Наличие же притяжения делает и в этом случае возможным столкновение вследствие искривления траектории. Точный расчет траектории движения не входит в задачу нашего курса. Однако вычисление истинного прицельного расстояния, при котором столкновение еще произойдет, можно выполнить, если кроме закона сохранения энергии использовать еще и закон сохранения момента количества движения. Этот закон, правда, мы вывели только для вращательного движения твердого тела в § 11. В рассматриваемом здесь случае момент центральной силы относительно начала координат равен нулю (линия действия силы проходит через эту точку, и плечо равно нулю). Поэтому и момент количества движения налетающей молекулы, рассматриваемой как материальная точка, относительно начала координат должен сохраняться (точный вывод этого соотношения можно найти в любом курсе теоретической механики). Величина же этого момента равна произведению количества движения на плечо.

В момент достижения минимального расстояния d скорость ударяющей молекулы v_m определится из закона сохранения энергии

$$mv_0^2/2 = mv_m^2/2 + U(d). \tag{II.2}$$

Здесь $U(d) = U_{\text{мин}} < 0$ есть значение потенциальной энергии сил притяжения на расстоянии d, отмеченное на рис. 3.6 в § 40.

В момент столкновения скорость ударяющей молекулы $\mathbf{v}_m$ направлена по касательной к траектории и перпендикулярна радиусу-вектору, равному по

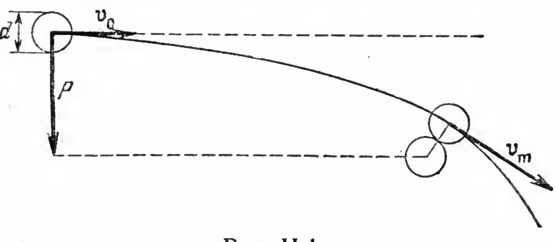


Рис. II.1.

величине d (рис. II.1). Приравнивая величины момента количества движения в положениях максимального удаления и максимального сближения, получим

$$mv_0 \cdot p = mv_m \cdot d. \tag{II.3}$$

Из полученных двух уравнений можно исключить v_m и определить минимальное прицельное расстояние p и эффективное сечение столкновения

$$\pi p^2 = \pi d^2 \frac{v_m^2}{v_0^2} = \pi d^2 \cdot \left(1 + \frac{|U_{\text{мин}}|}{mv_0^2/2}\right). \tag{II.4}$$

Для молекул с учетом (25.7) и (18.21) имеем $\overline{mv_{\text{отн}}^2}/2 = 3kT$. Вводя обозначение $|U_{\text{мин}}|/(3k) = C$, получаем

$$\pi p^2 = \pi d^2 \cdot \left(1 + \frac{C}{T}\right). \tag{II.5}$$

В результате полученное ранее выражение (25.14) для длины свободного пробега должно быть заменено на

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi p^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n\,(1 + C/T)}. \tag{II.6}$$

Величина поправочного множителя Сезерленда C имеет обычно порядок 100—200 °С.

2. При движении одноименно заряженных частиц между ними действует центральная сила кулоновского отталкивания, обратно пропорциональная квадрату расстояния:

$$F(r) = q_1 \cdot q_2/r^2, \tag{II.7}$$

что аналогично (лишь с обратным знаком) гравитационному взаимодействию (7.18). Соответствующая потенциальная энергия, аналогично (7.20), выражается зависимостью

$$U(r) = q_1 \cdot q_2/r. \tag{II.8}$$

Рассмотрим столкновения альфа-частицы (ядро атома гелия с двойным элементарным зарядом $q_1 = 2e$), налетающей с большой скоростью v_0 при прицельном расстоянии p на ядро какого-либо элемента с зарядом $q_2 = Ze$ (Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева). Вследствие отталкивания траектория частицы искривляется, и, когда данная альфа-частица пройдет на минимально

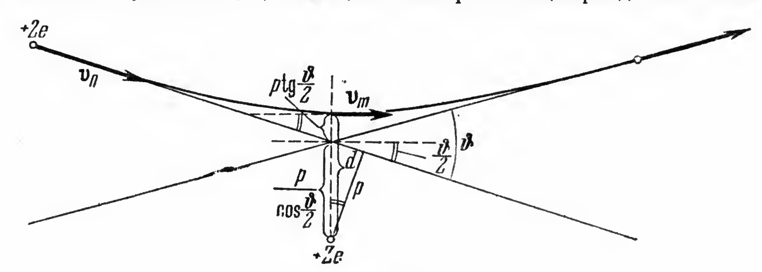


Рис. II.2.

возможном для нее расстоянии d от ядра, ее скорость достигнет некоторого минимального значения v_m (рис. II.2). Для определения последних двух величин мы воспользуемся, как и ранее, законами сохранения (II.1) и (II.3). Тогда

$$mv_0^2/2 = mv_m^2/2 + 2Ze^2/d \tag{II.9}$$

и

$$v_0 p = v_m d. \tag{II.10}$$

Исключая из этих двух уравнений v_m, можно получить квадратное уравнение, положительный корень которого дает величину отношения минимального достижимого расстояния к прицельному:

$$d/p = \sqrt{1+\rho^2}+\rho, \tag{II.11}$$

где

$$\rho = \frac{2Ze^2/p}{mv_0^2/2}. \tag{II.12}$$

В результате отклонения альфа-частицы ее траектория представляет собой ветвь гиперболы, внешний фокус которой расположен в центре отклоняющего ядра. Асимптоты этой гиперболы (рис. II.2) указывают направления движения альфа-частицы до и после столкновения. Угол отклонения между ними обозначим через ϑ. Из рисунка видно, что

$$d = \frac{p}{\cos(\vartheta/2)} + p \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

и

$$\frac{d}{p} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}. \tag{II.13}$$

Из сравнения (II.13) и (II.11) следует, что $\rho = \operatorname{tg}(\vartheta/2)$, т. е.

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{4Ze^2}{mv_0^2 p}\right). \tag{II.14}$$

Таким образом, при $p \to 0$ угол $\vartheta \to \pi$, а скорость $v_m \to 0$, т. е. налетающая «в лоб» частица отлетает обратно по той же прямой.

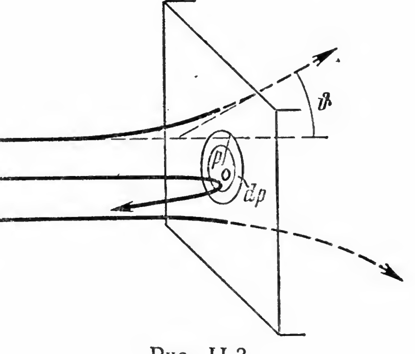


Рис. II.3.

Если перпендикулярно плоскости, в которой находится ядро O, летит однородный поток альфа-частиц (рис. II.3), то вероятность их попадания в кольцо, описанное радиусом p вокруг ядра и шириной $-dp$, пропорциональна площади кольца $-2\pi p\, dp$. Каждому значению p соответствует угол отклонения ϑ по соотношению

$$p = \frac{4Ze^2}{mv_0^2} \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}, \tag{II.15}$$

а интервалу $-dp$ — интервал углов отклонения $d\vartheta$:

$$-dp = \frac{4Ze^2}{mv_0^2}\frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}\frac{d\vartheta}{2}. \tag{II.16}$$

Отсюда вероятность того, что альфа-частицы отклоняются в пределах телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$, пропорциональна

$$dw \sim -2\pi p\, dp = 2\pi\left(\frac{4Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)}\frac{d\vartheta}{2} =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{4Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{2\pi\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)} = \frac{1}{8}\left(\frac{4Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)}. \tag{II.17}$$

Эта зависимость вероятности рассеяния альфа-частиц от угла отклонения была подтверждена в опытах Резерфорда, которые будут описаны в томе III.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

66 к.


I
Г. А. ЗИСМАН, О. М. ТОДЕС • КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ